ホテリングモデルの一考察

森　岡　　洋

はじめに

ホテリング（H.Hotelling）は［3］において、有限の鉱物資源を採掘するときに、異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値を最大化するためには、資源をどのように採掘すればよいのかというルールを導いた。このルールはホテリングのルールと呼ばれており、このルールの意義についてはDevarajanとFisher［2］に詳しく述べられているが、このホテリングのルールとはどのようなものであるのかをまず明らかにする。

ホテリングにおいては、異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値の最大化を考えるにおいて、価格と費用の関係は明確ではなく、純価格（the net price）という概念を使っている。この純価格は鉱物の価格から鉱物１単位の採掘費用と市場に出す費用を差し引いたものであり、鉱物１単位当たりの利潤を意味している。ホテリングはこの純価格を単に価格と呼び、数学的にはこの価格による異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値が最大となる、経済的意味としてはその利潤の現在価値が最大となる、鉱物の採掘の方法を競争の場合と独占の場合の二つに分けて分析している。

だが本稿では、純価格という形ではなく資源の採掘費用を明確に導入することにより、価格と費用を区別してホテリングが扱った問題をさらに拡張して考えてみる。そこでまず。第1節ではホテリングのモデルの数学的扱いに従い、鉱物の採掘費用を導入せず、異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値の最大化の問題を考える。第２節では資源の採掘費用を導入し、競争の場合と独占の場合に分けて、その利潤の現在価値の最大化の問題を考える。第3節ではこの利潤の現在価値の最大化が行われるとき、競争の場合には独占の場合よりも資源ストックが枯渇するまでの採掘期間は短くなる。この資源の採掘期間に焦点を当て、競争の場合において独占の場合と同じ採掘期間となるには、二つの場合に資源の採掘費用がどの程度異なればよいのかを明らかにする。また、経済的厚生の観点から問題があるが資源ストックの保全の立場から競争の場合にどの程度売上税を資源に賦課すれば独占の場合と採掘期間が等しくなるのかを検討してみる。

１．資源の採掘費用を含まない場合

(1) 競争の場合

ホテリングにおいて、市場が競争であるとき、各企業により採掘され市場に供給される資源の量（q_i）は資源の価格（P）に影響を及ばさず、各企業にとって所与なものであり、この価

格と採掘量に等しい供給量の積である売上収入（Pq_i）に関心を持つものとみなしている。このホテリングの説明では各企業と全体としての企業の関係が明確でないので、ここでは、多数の同じような企業が同じ量の初期の資源ストック（$S_i(0)$）を持ち同じ行動をするものと仮定する。このため、保有する初期の資源ストックを枯渇する期末の時点（T）も、各企業について同じになるものと考える。初期の資源ストック（$S(0)$）は個々の企業の初期の資源ストック（$S_i(0)$）を合計した数量であり、採掘量（q）は多数の企業による採掘量（q_i）の合計としての数量である。個々の企業の供給量は資源の価格には影響を及ばさないが、その合計である供給量（q）は需要関数により価格に影響を与える。このことから資源の価格は市場の需要関数によってこの採掘量（q）に等しい需要量との関係で決定されるものと仮定する。この需要関数を（1.1）で示し、aとbは定数であり、$a>0$、$b>0$とする[1]。

$$P = a - bq \tag{1.1}$$

ホテリングは、各企業が異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値が最大となるように、資源を採掘して供給するものと考えている[2]。各企業の初期の資源ストック（$S_i(0)$）がS_{i0}であり、この資源ストックの時点tの採掘量を$q_i(t)$とする。この資源ストックは期末（T）において採掘し尽くされ、枯渇し（1.5）になるものとするとき、各企業のこの売上収入の現在価値の最大化の課題を、本稿ではポントリヤーギンの最大値原理を使って、次のように定式化することができる。

最 大 化　$J = \int_0^T Pq_i e^{-rt} dt$　(1.2)

制約条件　$\dot{S}_i(t) = -q_i(t)$　(1.3)

$S_i(0) = S_{i0}$　(1.4)

$S_i(T) = 0$　(1.5)

Tは自由、ただし$T<\infty$。　(1.6)

(1.3) は資源ストックの時間による1次微分を示し、資源の採掘が行われれば、その採掘量だけ資源ストックが減少することを示している。

各企業は異時点間にわたる売上収入の現在価値の最大化において、それぞれの時点の資源の採掘量（$q_i(t)$）をどのように決定すればよいのかを考えて行動する。それゆえこの資源の採掘量が、各企業にとってのその現在価値の最大化のためのコントロール変数になっている。この現在価値である (1.2) を最大にする必要条件を求めるために、ハミルトン関数を定式化し (1.7) とする。λは補助変数である[3]。

$$H = Pq_i e^{-rt} + \lambda(-q_i) \tag{1.7}$$

(1.2) を最大にする第1の必要条件は、資源の採掘量（q_i）により、このハミルトン関数を最大にすることである。このハミルトン関数を資源の採掘量により最大にすると（1.9）になる[4]。

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = Pe^{-rt} - \lambda = 0 \tag{1.8}$$

$$Pe^{-rt} = \lambda \tag{1.9}$$

（1.2）を最大にする第2の必要条件は補助変数（λ）の時間による1次微分と資源ストックによるハミルトン関数の偏微分の間に（1.10）の関係があることである。

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S_i} = 0 \tag{1.10}$$

この（1.10）は（1.11）になりλは一定であるので、定数（C）になるものとする。

$$\lambda = C\ （定数） \tag{1.11}$$

（1.2）が最大となるための第3の条件は横断条件であり、ハミルトン関数が（1.12）となることである。横断条件はハミルトン関数の値が期末においてゼロになることを示している。

$$H = P(T)q_i(T)e^{-rT} + \lambda(-q_i(T)) = 0 \tag{1.12}$$

制約条件である（1.5）から期末では各企業の資源ストックはゼロであるので、各企業の期末の資源の採掘量（$q_i(T)$）もゼロとなる[5]。このことから横断条件は満たされ、また各企業の期末の資源の採掘量の合計である期末の資源の採掘量（$q(T)$）もゼロとなり（1.13）になる。

$$q(T) = 0 \tag{1.13}$$

（1.9）と（1.11）から（1.14）を得る。この（1.14）は利子率により割り引かれた資源の価格の現在価値が各時点において一定であることを示しており、異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の最大化が実現するためには、この（1.15）が実現するように資源ストックを採掘すればよいことになる。

$$Pe^{-rt} = C\ （定数） \tag{1.14}$$

（1.14）を時間で微分すると次の（1.15）になる。

$$\dot{P}e^{-rt} + (-r)Pe^{-rt} = 0$$

$$\frac{\dot{P}}{P} = r \tag{1.15}$$

競争の場合には、各企業は資源の価格が利子率（r）の大きさで上昇するように資源を採掘し、供給すると、異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値が最大になることを示している[6]。このことは競争の場合でのホテリングのルールと呼ばれている[7]。

（1.14）は（1.16）となり、初期の価格（$P(0)$）と期末の価格（$P(T)$）は（1.17）と（1.18）によって示すことができる。

$$P(t) = Ce^{rt} \tag{1.16}$$

$$P(0) = C \tag{1.17}$$

$$P(T) = Ce^{rT} \tag{1.18}$$

（1.13）のように期末の資源の採掘量はゼロとなり、需要関数である（1.1）から期末の価格はaに等しくなり（1.19）となる[8]。

$$P(T) = a \tag{1.19}$$

期末の価格については（1.18）と（1.19）から（1.20）の関係を得る。

$$Ce^{rT} = a \tag{1.20}$$

また、各企業の資源の供給量（q_i）は価格に影響を及ぼさないが、それを合計した供給量（q）は（1.1）に基づき、価格を変化させる。（1.3）から各企業の資源ストック（S_i）を合計した資源ストックの時間による1次微分（$\dot{S}$）と資源の採掘量（q）の間には（1.21）の関係がある。

$$\dot{S}(t) = -q(t) \tag{1.21}$$

需要関数である（1.1）と（1.21）から（1.22）になる。

$$\dot{S}(t) = -\frac{1}{b}(a - P(t)) \tag{1.22}$$

価格を示す（1.16）を（1.22）に代入すると（1.23）になる。

$$\dot{S}(t) = -\frac{1}{b}a + \frac{1}{b}Ce^{rt} \tag{1.23}$$

（1.23）から資源ストック（S）については、次の（1.24）を得る。C_1は定数である。

$$S(t) = -\frac{1}{b}at + \frac{1}{b}\frac{1}{r}Ce^{rt} + C_1 \tag{1.24}$$

初期の資源ストックは（1.4）からS_0になるものとすると、（1.24）から（1.25）になる。

$$S(0) = \frac{1}{b}\frac{1}{r}C + C_1 = S_0 \tag{1.25}$$

期末の資源ストックは（1.5）からゼロになり、また（1.24）から（1.26）になる。

$$S(T) = -\frac{1}{b}aT + \frac{1}{b}\frac{1}{r}Ce^{rT} + C_1 = 0 \tag{1.26}$$

（1.20）、（1.25）および（1.26）の三つの方程式において、未知数はC、C_1およびTであるので、この三つの未知数を解くことができる。ここで、Hotelling［3］に従い、次のような数値例を考えてみる。需要関数である（1.1）において、a=100、b=1とする。このとき需要関数は（1.27）になる。

$$P = 100 - q \tag{1.27}$$

また、初期の資源ストック（S_0）を1,000、利子率（r）を0.04とすると、（1.20）、（1.25）および（1.26）から次の（1.28）、（1.29）および（1.30）を得る。

$$Ce^{0.04T} = 100 \tag{1.28}$$

$$\frac{1}{0.04} \times C + C_1 = 1{,}000 \tag{1.29}$$

$$-100T + \frac{1}{0.04} \times Ce^{0.04T} + C_1 = 0 \tag{1.30}$$

これら三つの方程式を解くと、T=26.2524、C=34.9904およびC_1=125.24になる。これらの数値から、価格を示す（1.16）は（1.31）になり、初期の価格（$P(0)$）は34.9904となり、期末の価格（$P(T)$）は100になる。

$$P(t) = 34.9904e^{0.04t} \tag{1.31}$$

資源の採掘量は需要関数である（1.27）と価格を示すこの（1.31）から（1.32）になる。この式によれば、初期の資源の採掘量（$q(0)$）は65.0096であり、期末の資源の採掘量（$q(T)$）はゼロである。

$$q(t) = 100 - 34.9904e^{0.04t} \tag{1.32}$$

資源ストックは（1.24）から（1.33）になる。

$$S(t) = -100t + 874.76e^{0.04t} + 125.24 \tag{1.33}$$

また、各企業を合計した初期から期末までの利子率により割り引かれた売上収入の現在価値は、（1.34）になり、これに（1.31）と（1.32）を代入すると34,990.4になる。

$$J = \int_0^{26.2524} Pqe^{-0.04t}dt \tag{1.34}$$

$$J = \int_0^{26.2524}(3{,}499.04 - 1{,}224.328e^{0.04t})dt$$

$$J = 34{,}990.4$$

(2)　独占の場合

資源を採掘し市場に供給する企業が一つである独占の場合を検討してみる。独占企業にとって、所与の初期の資源ストック（S_0）において、異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値を最大にすることが課題であるとする。ここで競争の場合と同様に、この企業が資源を採掘することにより資源ストックが枯渇する期末の時点をT、資源の価格をP、採掘される資源量をqで示す。

この独占企業は価格と資源の需要量との間の関係である（1.1）と同じ（1.35）の需要関数については知っており、市場に供給する資源の量を調整することにより価格を操作することができ、（1.36）になるものとする。独占企業はこの需要関数により売上収入を計算して、資源を採掘し、市場に供給するものと仮定する。

$$P = a - bq \tag{1.35}$$

$$P = P(q) \tag{1.36}$$

異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値の最大化を行うのに、Hotelling［3］では条件付きの変分法を使っているが[9]、ここでは、ポントリヤーギンの最大値原理を使う。独占企業にとってこの最大化の課題を次ぎのように示すことができる。ただしこの最大化を行うためのコントロール変数は資源の採掘量（q）である。

最大化　　$J = \int_0^T P(q)qe^{-rt}dt$　　(1.37)

制約条件　　$\dot{S}(t) = -q(t)$　　(1.38)

$S(0) = S_0$　　(1.39)

$S(T) = 0$　　(1.40)

Tは自由、ただし$T<\infty$。　　(1.41)

この（1.37）を最大にする必要条件をポントリヤーギンの最大値原理を使って求めるために、

まずハミルトン関数を定式化すると、(1.42) になる。

$$H = P(q)qe^{-rt} + \lambda(-q) \tag{1.42}$$

(1.37) を最大にする第1の必要条件はこのハミルトン関数をコントロール変数である資源の採掘量 (q) によって最大にすることであり、このとき (1.43) になる。この (1.43) は利子率により割り引かれた限界収入が λ に等しいことを示している。

$$\frac{\partial H}{\partial q} = P(q)e^{-rt} + qP'(q)e^{-rt} - \lambda = 0 \tag{1.43}$$

$$(P + P'(q)q)e^{-rt} = \lambda \tag{1.44}$$

(1.37) を最大にする第2の必要条件は、補助変数 (λ) の時間による1次微分とハミルトン関数の資源ストックによる偏微分の間に (1.45) の関係が生ずることである。

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0 \tag{1.45}$$

この (1.45) から (1.46) を得、λ は一定で C (定数) になる。

$$\lambda = C \text{（一定）} \tag{1.46}$$

(1.37) が最大となる第3の必要条件は横断条件であり、期末の時点 (T) が自由であるので、ハミルトン関数の期末の値がゼロであり、(1.47) になることである。

$$H = P(q(T))q(T)e^{-rT} + \lambda(-q(T)) = 0 \tag{1.47}$$

(1.40) から期末の資源ストックはゼロであるので (1.48) となり、期末の資源の採掘量 ($q(T)$) もゼロになり[10]、横断条件は満たされる。

$$q(T) = 0 \tag{1.48}$$

独占の場合 (1.44) と (1.46) から (1.49) となり、利子率により割り引かれた限界収入は一定で C になる。つまり、独占企業にとって異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値を最大にするためには、利子率により割り引かれた限界収入を各時点で一定となるように資源を採掘し、市場に供給すればよいことになる[11]。

$$(P(q) + P'(q)q)e^{-rt} = C \tag{1.49}$$

また、この (1.49) の限界収入を $M(q)$ で示し、その両辺を時間 (t) で微分すると (1.50) となり、限界収入は時間の経過とともに利子率の比率で上昇することになる。この (1.50) より、独占企業は異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値を最大にするためには、限界収入の増加率が利子率に等しくなるように資源を採掘すればよいことになり、このことが資源の採掘費用を含まない独占の下でのホテリングのルールになる。

$$\frac{\dot{M}(q)}{M(q)} = r \tag{1.50}$$

これまで、需要関数が (1.36) であるときの利子率により割り引かれた売上収入の現在価値の最大化の問題を述べてきたが、次にこの需要関数がより具体的な (1.35) であるときには、この最大化の問題がどのようになるのかを述べる。まず、ハミルトン関数は (1.51) になる。

$$H = (a - bq)qe^{-rt} + \lambda(-q) \tag{1.51}$$

ハミルトン関数がこの（1.51）であると、(1.37）を最大にする第１の必要条件である ,(1.44) は（1.52）になる。

$$(a - 2bq)e^{-rt} = \lambda \tag{1.52}$$

また、(1.37）が最大となる第２の必要条件は（1.53）である。

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0 \tag{1.53}$$

この（1.53）からλは一定でC（定数）になるものとする。

$$\lambda = C \text{（定数）} \tag{1.54}$$

(1.37）が最大となる第３の必要条件である横断条件から、ハミルトン関数は（1.55）となる。

$$H = (a - bq(T))q(T)e^{-rT} - \lambda q(T) = 0 \tag{1.55}$$

また（1.40）から期末の資源ストックはゼロであるので、期末の資源の採掘量（$q(T)$）もゼロとなり（1.56）となって、横断条件は満たされる。

$$q(T) = 0 \tag{1.56}$$

(1.52）と（1.54）から（1.57）となり、利子率により割り引かれた限界収入の現在価値は一定でC（定数）となる。

$$(a - 2bq)e^{-rt} = C \text{（定数）} \tag{1.57}$$

この（1.57）から、時点tの資源の採掘量は（1.58）になる。

$$q(t) = \frac{1}{2b}(a - Ce^{rt}) \tag{1.58}$$

この(1.58)の$q(t)$を(1.38)に代入すると、資源ストックの時間による１次微分($\dot{S}(t)$)は(1.59)になる。

$$\dot{S}(t) = -\frac{1}{2b}(a - Ce^{rt}) \tag{1.59}$$

さらに（1.56）より期末の資源の採掘量はゼロとなるので、(1.61）を得る。

$$q(T) = \frac{1}{2b}(a - Ce^{rT}) = 0 \tag{1.60}$$

$$a = Ce^{rT} \tag{1.61}$$

(1.59）の$\dot{S}(t)$を時間で積分すると、$S(t)$は（1.62）になる。

$$S(t) = -\frac{1}{2b}at + \frac{1}{2b}\frac{1}{r}Ce^{rt} + C_1 \tag{1.62}$$

初期の資源ストック（$S(0)$）は、(1.39）よりS_0であるので、(1.62）から（1.63）になる。

$$S(0) = \frac{1}{2b}\frac{1}{r}C + C_1 = S_0 \tag{1.63}$$

期末の資源ストック（$S(T)$）はゼロであるので、(1.62）から（1.64）になる。

$$S(T) = -\frac{1}{2b}aT + \frac{1}{2b}\frac{1}{r}Ce^{rT} + C_1 = 0 \quad (1.64)$$

次に、(1.35) の需要関数において、競争の場合と同様に a=100、b=1、利子率 (r) を0.04、初期の資源ストック (S_0) を1,000と仮定する。このような仮定において、独占の場合での資源ストックが枯渇するまでの資源の採掘期間 (T)、資源の価格 (P)、資源の採掘量 (q)、資源ストック (S)、利子率により割り引かれた売上収入の現在価値を計算してみる。

これらの数値を (1.61)、(1.63) および (1.64) に代入すると、次の三つの方程式を得る。

$$C = 100e^{-0.04T} \quad (1.65)$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{0.04}C + C_1 = 1{,}000 \quad (1.66)$$

$$-\frac{1}{2} \times 100T + \frac{1}{2} \times \frac{1}{0.04}Ce^{0.04T} + C_1 = 0 \quad (1.67)$$

これらの三つの方程式から、未知数であるT、CおよびC_1を解くと、資源ストックがゼロとなるまでの期間 (T) は39.9406となり[(12)]、C=20.2377、C_1=747.029となる。資源の採掘量 (q) は (1.58) により (1.68) になる。

$$q(t) = 50 - 10.11885e^{0.04t} \quad (1.68)$$

この (1.68) によれば、初期の資源の採掘量 ($q(0)$) は39.88115であり、期末の資源の採掘量 ($q(T)$) はゼロになる。

資源の価格 (P) は需要関数である (1.35) にこのqを代入すると、(1.69) になる。

$$P(t) = 50 + 10.11885e^{0.04t} \quad (1.69)$$

この (1.69) において、初期の資源の価格 ($P(0)$) は60.11885となり、期末の資源の価格 ($P(T)$) は100になる。

資源ストック (S) は (1.62) から (1.70) になる。

$$S(t) = -50t + 252.97125e^{0.04t} + 747.029 \quad (1.70)$$

独占の場合の初期から期末までの利子率により割り引かれた売上収入の現在価値は (1.71) で示すことができ、(1.68) と (1.69) をこの (1.71) に代入すると39,762.7になる。

$$J = \int_0^{39.9406} P(q)qe^{-0.04t}dt \quad (1.71)$$

$$J = \int_0^{39.9406} (2{,}500e^{-0.04t} - (10.11885)^2e^{0.04t})dt$$

$$J = 39{,}762.7$$

(3) 競争の場合と独占の場合の比較

資源の採掘費用を含まない場合での、異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値を最大にする最適な資源の採掘の方法を、競争の場合と独占の場合とではどのように異なるのかを比較して述べる。競争の場合には、各企業は資源の価格の上昇率が利子率に等しくなるように資源を採掘すればよいことになる。このことからホテリングのルールは、資源

の価格の上昇率が利子率に等しくなるように、各企業は資源を採掘すべきであるということになる。他方、独占の場合には、その売上収入の現在価値の最大化を実現する方法は、売上の限界収入が時間を通じて一定であるように企業が資源を採掘することである。このことからホテリングのルールは、限界収入の上昇率が利子率に等しくなるように、企業は資源を採掘すべきであるということになる。

これまで、企業の資源の採掘において異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値の最大化の問題を、競争の場合と独占の場合について、初期の資源ストックが1,000、a=100、b=1となる同じ需要関数である（1.1）と（1.35）の下で述べた。ここでは、資源ストックが枯渇するまでのこの売上収入の現在価値は、競争の場合には34,990.4であり、独占の場合には39,762.7であり、独占の場合の方が大きい。資源ストックが枯渇するまでの資源の採掘期間については、競争の場合は26.2524であり、独占の場合は39.9406であり、資源の採掘期間は独占の場合の方が長くなる。

競争の場合と独占の場合とで、資源について同じ（1.1）と（1.35）の需要曲線を仮定したとき、限界収入の曲線の方が価格の曲線よりも傾斜が急である。競争の場合での価格の上昇率も独占の場合の限界収入の上昇率も利子率に等しいということは、価格の上昇率が独占の場合には競争の場合よりも小さいことになる。また、独占の場合には競争の場合よりも価格の上昇率が小さいことは、同じ需要曲線を仮定したとき、独占の場合には競争の場合よりも資源の採掘量がゆっくり減少することになる。

競争の場合と独占の場合のこの資源の価格と採掘量を具体的な数値により見ていくと、まず資源の価格については、初期の価格は競争の場合には34.9904であり、独占の場合には60.11885であり、独占の場合の方が高い。資源の期末の価格は競争の場合にも独占の場合にも100となり、等しくなる。資源の採掘期間は競争の場合には独占の場合よりも短いことから、資源の価格は競争の場合の方が独占の場合よりも大きく上昇していることになる。価格の時間による１次微分（$\dot{P}$）を見ても、競争の場合には（1.31）より$1.399616e^{0.04t}$であるが、独占の場合には（1.69）より$0.404754e^{0.04t}$であり、競争の場合の方が上昇率は高い[13]。

資源の採掘量については、初期の資源の採掘量は競争の場合には65.0096であるが、独占の場合には39.88115であり、競争の場合の方が大きい。期末の資源の採掘量はともにゼロである。資源の需要関数（1.1）および（1.35）において、資源の価格の時間による１次微分（$\dot{P}$）と資源の採掘量の時間による１次微分（$\dot{q}$）の間には（1.72）の関係があるので、資源の採掘量の時間による１次微分はマイナスとなる。資源の採掘量の時間による１次微分は競争の場合には$-1.399616e^{0.04t}$であり、独占の場合には$-0.404754e^{0.04t}$であり、競争の場合には独占の場合よりも資源の採掘量はより大きく減少する。

$$\dot{q}(t) = -\dot{P}(t) \tag{1.72}$$

資源ストックについては、競争の場合も独占の場合も初期の資源ストックは1,000であり、期末の資源ストックはゼロであり同じになる。だが、資源ストックが枯渇するまでの採掘期間

は競争の場合には26.2524であり、独占の場合には39.9406であることから、競争の場合には独占の場合よりも短期間で資源ストックを採掘し尽くす。逆に独占の場合には、資源の採掘量を押さえ、より長期的に採掘が行われることになる。

2．資源の採掘費用を含む場合

(1) 競争の場合

第1節では、企業の資源の採掘において、採掘費用をゼロであるとみなしたが、本節では資源1単位当たりkの資源の採掘費用を含めて、企業の異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値の最大化の問題を述べる[14]。そこでまず、企業が資源を競争的に供給する場合を考える。企業が資源を市場に競争的に供給するという仮定については、第1節と同じであるものとする。つまり、多数の同じ様な個々の企業は、その供給量の変化が価格に影響を及ぼさず、価格を一定であると見なして行動するものと仮定する。ただし、各企業の供給量の合計である全体としての供給量の変化は需要関数に従い価格を変化させるものとする。需要関数は第1節と同様であり、(2.1) になるものとする。

$$P = a - bq \tag{2.1}$$

各企業の利潤（π_i）は (2.2) になるものとする。Pq_iは企業が資源を採掘し、市場で売ることにより得る収入を示し、kq_iは各企業の資源の採掘費用を示している。以後企業が資源を採掘する費用と、市場に供給する費用の二つの費用を合わせて、資源の採掘費用と呼ぶことにする。ここでkは各企業について同じであり一定であると仮定し、平均費用も限界費用も同じkになるものとする。

$$\pi_i = Pq_i - kq_i \tag{2.2}$$

第1節と同様に、各企業は同じ初期の資源ストック（$S_i(0)$）を持ち、同じ行動をするものと仮定する。このとき各企業にとっての最適な資源の採掘の課題は次の制約条件 (2.4)、(2.5)、(2.6)、(2.7) および (2.8) の下で、異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値である (2.3) を最大にすることになる。

最 大 化 $$J = \int_0^T (Pq_i - kq_i)e^{-rt}dt \tag{2.3}$$

制約条件 $$\dot{S}_i(t) = -q_i(t) \tag{2.4}$$

$$S_i(0) = S_{i0} \tag{2.5}$$

$$S_i(T) = 0 \tag{2.6}$$

$$P(t) - k > 0 \tag{2.7}$$

Tは自由、ただし$T<\infty$。 (2.8)

この現在価値を最大にする必要条件を求めるために、ハミルトン関数を定式化すると (2.9) になる。

$$H = (Pq_i - kq_i)e^{-rt} + \lambda(-q_i) \tag{2.9}$$

まず、(2.3) を最大にする第1の必要条件は、このハミルトン関数をコントロール変数である資源の採掘量 (q_i) で最大にすることであり､ハミルトン関数が最大になると (2.11) になる。ここで、(2.7) より$P \leqq k$になると資源の採掘量はゼロになる。

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = (P - k)e^{-rt} - \lambda = 0 \tag{2.10}$$

$$(P - k)e^{-rt} = \lambda \tag{2.11}$$

(2.3) を最大にする第２の必要条件は、状態変数である資源ストック (S_i) について (2.12) になることである。

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S_i} = 0 \tag{2.12}$$

この (2.12) から、λは一定となり、これをCとする。

$$\lambda = C \text{（定数）} \tag{2.13}$$

(2.3) が最大となる第３の必要条件は横断条件であり、(2.14) になる。

$$H = (P(T)q_i(T) - kq_i(T))e^{-rT} + \lambda(-q_i(T)) = 0 \tag{2.14}$$

(2.6) から各企業の期末の資源ストックはゼロであるので、各企業の資源の採掘量 ($q_i(T)$) もゼロになる[15]。このことから横断条件は満たされ、各企業の期末の採掘量を合計した期末の資源の採掘量 ($q(T)$) もゼロになる。

$$q(T) = 0 \tag{2.15}$$

(2.11) と (2.13) から (2.16) が得られ、これは利子率により割り引かれた資源１単位の利潤は各時点で一定であることを示している。

$$(P - k)e^{-rt} = C \text{（定数）} \tag{2.16}$$

この (2.16) を時間で微分すると (2.17) になり、資源１単位の利潤の増加率は利子率にひとしくなる。この (2.17) から、各企業は資源１単位の利潤の増加率が利子率に等しくなるように資源を採掘すれば、(2.3) の最大化が実現され最適となり、このことが資源の採掘費用を含む場合での競争の場合のホテリングのルールになる。

$$\frac{d(P - k)/dt}{P - k} = r \tag{2.17}$$

(2.16) は (2.18) となり、資源の価格 (P) についての式を得る。

$$P(t) = k + Ce^{rt} \tag{2.18}$$

また、(2.4)、(2.18) および需要関数である (2.1) から各企業の資源ストック (S_i) を合計した資源ストック (S) の時間による１次微分 ($\dot{S}$) は (2.19) になる。

$$\dot{S}(t) = -q(t) = -\frac{1}{b}(a - P(t))$$

$$\dot{S}(t) = -\frac{1}{b}(a - k) + \frac{1}{b}Ce^{rt} \tag{2.19}$$

資源ストック（S）ついては、(2.19) を時間で積分することにより (2.20) を得る。

$$S(t) = -\frac{1}{b}(a-k)t + \frac{1}{br}Ce^{rt} + C_1 \tag{2.20}$$

初期の資源ストック（$S(0)$）をS_0とすると、(2.20) から (2.21) を得る。

$$S(0) = \frac{1}{br}C + C_1 = S_0 \tag{2.21}$$

また期末の資源ストック（$S(T)$）はゼロであるので、(2.22) になる。

$$S(T) = -\frac{1}{b}(a-k)T + \frac{1}{br}Ce^{rT} + C_1 = 0 \tag{2.22}$$

いま、第1節と同様に需要関数 (2.1) において、a=100、b=1とすると需要関数は (2.23) になる。

$$P(t) = 100 - q(t) \tag{2.23}$$

また初期の資源ストック（S_0）が1,000であり、利子率（r）が0.04であり、資源1単位の採掘費用（k）が30であるとする。このような仮定の下で資源の枯渇までの採掘期間（T）、資源の価格（$P(t)$）、資源の採掘量（$q(t)$）および資源ストック（$S(t)$）を求めてみる。

まず価格を示す式である (2.18) にk=30を代入すると、その式は (2.24) になる。

$$P(t) = 30 + Ce^{0.04t} \tag{2.24}$$

期末では (2.6) より資源の採掘量はゼロとなり、$q(T)$=0となる。この期末の採掘量を需要関数 (2.23) に代入すると、期末の価格（$P(T)$）は100になる。期末の価格が100になることから、価格の式である (2.24) より期末の価格について (2.25) を得る。

$$Ce^{0.04T} = 70 \tag{2.25}$$

初期の資源ストックは1,000であるので、この資源ストックを示す式である (2.21) は (2.26) になる。

$$\frac{1}{0.04}C + C_1 = 1{,}000 \tag{2.26}$$

期末の資源ストックはゼロであるので、この資源ストックを示す式である (2.22) は (2.27) になる。

$$-70T + \frac{1}{0.04}Ce^{0.04T} + C_1 = 0 \tag{2.27}$$

(2.25)、(2.26) および (2.27) の三つの方程式からT=32.4621、C=19.1062およびC_1=522.345を得る。

C=19.1062を (2.24) に代入すると、資源の価格を示す式は (2.28) になる。

$$P(t) = 19.1062e^{0.04t} + 30 \tag{2.28}$$

この式から、初期の価格（$P(0)$）は49.1062になり、期末の価格（T）は100になる。k=30であるので、制約条件である (2.7) は満たされる。

(2.23) の需要関数とこの (2.28) から、資源の採掘量を示す式は (2.29) になる。この式から初期

$$q(t) = 70 - 19.1062e^{0.04t} \tag{2.29}$$

の資源の採掘量（$q(0)$）は50.8938になる。

資源ストック（S）を示す式は、(2.20) にここでのCとC_1を代入すると (2.30) になる。

$$S(t) = -70t + 477.655e^{0.04t} + 522.345 \tag{2.30}$$

(2.3) の異時点間にわたる利子率で割り引かれた利潤の現在価値 (2.31) に (2.28) と (2.29) を代入すると、$T=32.4621$であるので19,106.2になる。

$$J = \int_0^{32.4621}(Pq - 30q)e^{-0.04t}dt \tag{2.31}$$

$$J = \int_0^{32.4621}(19.1062\,(70 - 19.1062e^{0.04t}))dt$$

$$J = 19{,}106.2$$

(2) 独占の場合

ここでは独占企業が資源の採掘を行うときに、資源の採掘費用を含めた異時点間にわたる利子率で割り引かれた利潤の現在価値の最大化の問題は、どのようになるのか述べる。採掘費用については競争の場合と同様に資源１単位の採掘費用（k）を30とし、このkの大きさは一定であり、平均費用と限界費用を示すものとする。需要関数はこれまでと同じであり、(2.32) および (2.33) であるとする。独占の場合には、企業は供給量の変化が価格を変化させるので、需要関数のPとqの間の関係を知って行動するものとする。初期の資源ストックはこれまでと同じでS_0=1,000であるとする。

$$P = a - bq \tag{2.32}$$

$$P = P(q) \tag{2.33}$$

このとき、独占企業はどのように資源を採掘すれば、異時点間にわたる利子率で割り引かれた利潤の現在価値を最大にすることができるかを検討する。この現在価値の最大化の問題を制約条件 (2.35)、(2.36)、(2.37)、(2.38) および (2.39) の下で、(2.34) を最大にすることであるとする。

最 大 化　$$J = \int_0^T(P(q)q - kq)e^{-rt}dt \tag{2.34}$$

制約条件　$$\dot{S}(t) = -q(t) \tag{2.35}$$

$$S(0) = S_0 \tag{2.36}$$

$$S(T) = 0 \tag{2.37}$$

$$P(q) - k > 0 \tag{2.38}$$

Tは自由、ただし$T<\infty$。　(2.39)

この採掘費用を含む場合での (2.34) を最大にする必要条件を求めるために、ハミルトン関数を定式化すると (2.40) になる。

$$H = (P(q)q - kq)e^{-rt} + \lambda(-q) \tag{2.40}$$

(2.34) が最大となる第１の必要条件は、このハミルトン関数をコントロール変数である資源の採掘量（q）によって最大にすることであり、(2.42) になる。

$$\frac{\partial H}{\partial q} = (P'(q)q + P(q) - k)e^{-rt} - \lambda = 0 \qquad (2.41)$$

$$(P'(q)q + P(q) - k)e^{-rt} = \lambda \qquad (2.42)$$

(2.34) が最大となる第2の必要条件は、状態変数である資源ストック (S)、λ、ハミルトン関数について (2.43) の関係になることである。

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0 \qquad (2.43)$$

この (2.43) からλは一定となり、(2.44) においてCになるものとする。

$$\lambda = C \text{（定数）} \qquad (2.44)$$

(2.34) が最大となる第3の必要条件は横断条件であり、ハミルトン関数の期末の値がゼロになることである。

$$H = (P(q(T))q(T) - kq(T))e^{-rT} + \lambda(-q(T)) = 0 \qquad (2.45)$$

(2.37) から期末の資源ストックはゼロであるので、期末の資源の採掘量 ($q(T)$) もゼロとなることから (2.46) になり[16]、横断条件は満たされる。

$$q(T) = 0 \qquad (2.46)$$

(2.44) によりλは定数でCになるとすると、(2.42) は (2.47) になる。

$$(P'(q)q + P - k)e^{-rt} = C \qquad (2.47)$$

この (2.47) において、$P'(q)q+P(q)$ は企業が独占の場合の限界収入になり、kは限界費用に等しくなるので、(2.47) は利子率により割り引かれた限界利潤の現在価値が時間を通じて一定であることを示している。この (2.47) を時間で微分すると (2.48) になり、限界利潤の増加率がrになることを示している。この (2.48) によれば、独占企業は限界利潤の増加率が利子率に等しくなるように資源を採掘すれば最適となり、この (2.48) は資源の採掘費用を含む場合での独占の場合のホテリングのルールになる。

$$\frac{d(P'(q)q + P - k)/dt}{P'(q)q + P - k} = r \qquad (2.48)$$

ここで (2.32) の需要関数においては$P'(q)$ は$-b$になり、$P(q)$ は$a-bq$に等しいので、(2.47) は (2.49) になる。

$$(a - 2bq - k)e^{-rt} = C \qquad (2.49)$$

また、この (2.49) から資源の採掘量 (q) について (2.50) を得る。

$$q(t) = \frac{1}{2b}(a - k - Ce^{rt}) \qquad (2.50)$$

この (2.50) を (2.35) に代入すると、資源ストックの時間による1次微分 ($\dot{S}$) は (2.51) になる。

$$\dot{S}(t) = -q(t) = -\frac{1}{2b}(a - k - Ce^{rt}) \qquad (2.51)$$

(2.46) から期末 (T) の資源の採掘量はゼロとなるので、(2.50) は (2.52) になる。

$$q(T) = \frac{1}{2b}(a - k - Ce^{rT}) = 0 \tag{2.52}$$

またこの（2.52）から（2.53）を得る。

$$a - k = Ce^{rT} \tag{2.53}$$

（2.51）を時間で積分すると、資源ストック（S）を示す式は（2.54）になる。

$$S(t) = -\frac{1}{2b}(a - k)t + \frac{1}{2br}Ce^{rt} + C_1 \tag{2.54}$$

初期の資源ストック（$S(0)$）はS_0であるので、（2.54）から（2.55）になる。

$$S(0) = \frac{1}{2br}C + C_1 = S_0 \tag{2.55}$$

期末の資源ストック（$S(T)$）は（2.37）よりゼロであるので、（2.54）は（2.56）になる。

$$S(T) = -\frac{1}{2b}(a - k)T + \frac{1}{2br}Ce^{rT} + C_1 = 0 \tag{2.56}$$

これまでと同様に、需要関数（2.32）において、a=100、b=1であるとする。資源1単位の採掘費用（k）は30であり、利子率（r）は0.04であり、初期の資源ストック（S_0）は1,000であるとする。このとき（2.53）、（2.55）および（2.56）は（2.57）、（2.58）および（2.59）になる。

$$Ce^{0.04T} = 70 \tag{2.57}$$

$$\frac{1}{2\times0.04}C + C_1 = 1{,}000 \tag{2.58}$$

$$-\frac{1}{2}\times 70T + \frac{1}{2\times0.04}Ce^{0.04T} + C_1 = 0 \tag{2.59}$$

これらの三つの方程式により未知数であるT, CおよびC_1を解くと、T=50.2173、C=9.39148およびC_1=882.6065になる。これらの三つの数値をまず資源の採掘量を示す(2.50)に代入すると、資源の採掘量（q）は（2.60）になる。

$$q(t) = 35 - 4.69574e^{0.04t} \tag{2.60}$$

この（2.60）から、初期の資源の採掘量（$q(0)$）は30.30426になり、期末の資源の採掘量（$q(T)$）は、横断条件で求めた結果と同様に、ゼロになる。

資源の価格（P）はこの（2.60）と需要関数である（2.32）から（2.61）になる。この式から初期の価格は69.69574になり、期末の価格は100になる。この資源の価格においては制約条件である（2.38）は満たされる。

$$P(t) = 65 + 4.69574e^{0.04t} \tag{2.61}$$

資源ストック（S）は（2.54）から（2.62）になる。

$$S(t) = -35t + 117.3935e^{0.04t} + 882.6065 \tag{2.62}$$

（2.63）に（2.60）と（2.61）を代入すると、異時点間にわたる0.04の利子率で割り引かれ

た利潤の現在価値の最大値は22,958.7になる。

$$J = \int_0^{50.2173}(P(q)q - 30q)e^{-0.04t}dt \tag{2.63}$$

$$J = \int_0^{50.2173}(1,225e^{-0.04t} - 4.69574^2e^{0.04t})dt$$

$$J = 22,958.7$$

(3) 競争の場合と独占の場合の比較

まず資源の採掘費用を含む場合での、異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値を最大にする条件を、競争の場合と独占の場合について比較する。競争の場合には、各企業は利子率により割り引かれた資源1単位の利潤が時間を通じて一定になるように資源を採掘すればよいことになる。このことから競争の場合には、ホテリングのルールは各企業が資源1単位の利潤の増加率は利子率に等しくなるように資源を採掘すべきであるということになる。独占の場合には、独占企業は利子率により割り引かれた限界利潤が時間を通じて一定になるように資源を採掘すればよいことになる。このことから独占の場合でのホテリングのルールは、限界利潤の増加率が利子率に等しくなるように、独占企業は資源を採掘すべきであるということになる。

資源1単位の採掘費用がk=30で同じであるとき、同じ条件の下での競争の場合と独占の場合の資源の採掘期間を比較すると、競争の場合には32.4621であるのに対し、独占の場合には50.2173であり、独占の場合の方が長くなる。また、資源ストックが枯渇するまでの、異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値は、競争の場合には19,106.2であるのに対し、独占の場合には22,958.7であり、独占の場合の方が大きくなる。

資源の価格（P）については、初期の価格は競争の場合には49.1062であるのに対し、独占の場合には69.69574になり、独占の場合の方が高い。期末の資源の価格は競争の場合も独占の場合も100となりともに等しい。価格の時間による1次微分（dP/dt）は競争の場合には$0.764248e^{0.04t}$であるのに対し、独占の場合には$0.1878296e^{0.04t}$であり、独占の場合の方が価格はゆっくり上昇する。

資源の採掘量（q）については、初期の採掘量は競争の場合には50.8938であるのに対し、独占の場合には30.30426であり、競争の場合の方が大きい。期末の資源の採掘量はともにゼロである。資源の採掘量の時間による1次微分（dq/dt）は、競争の場合には$-0.764248e^{0.04t}$であるのに対し、独占の場合には$-0.1878296e^{0.04t}$であることから、資源の採掘量は独占の場合には競争の場合よりもゆっくりと減少する。

3．資源の採掘費用を含む場合での資源の採掘期間についての比較

(1) 資源1単位の採掘費用が競争の場合と独占の場合とで異なる場合

資源ストックが枯渇するまでの資源の採掘期間に注目してみる。資源の採掘費用を含む場合

において、資源1単位の採掘費用（k）が競争の場合と独占の場合とも同じ30であると、資源の採掘期間は競争の場合よりも独占の場合の方が長く、独占の場合の方が資源保存的であった。だが、独占の場合には、資源の採掘が1企業だけで大量に行われることから、規模の経済が作用して、資源の採掘費用が低下することも考えられる。

独占の場合において、資源の採掘費用が低下して、資源1単位の採掘費用（k）がゼロとなるときには、第1節の資源の採掘費用がない場合になり、資源の採掘期間は39.9406であった。資源1単位の採掘費用が30であるときには、資源の採掘期間は50.2173であり、資源1単位の採掘費用が低下すると、資源の採掘期間は短くなる。このことから、競争の場合に資源1単位の採掘費用が30で変化せず一定であるとき、独占の場合に資源1単位に採掘費用が低下すると、独占の場合での資源の採掘期間は競争の場合での資源の採掘期間と同じになり、独占の場合でのその採掘費用がさらに低下すると、競争の場合での資源の採掘期間よりも短くなる可能性がある。ここで、競争の場合と独占の場合について、資源1単位の採掘費用が30であるという仮定をはずし、資源1単位の採掘費用と資源の採掘期間の関係を明らかにしてみる。

この問題を解くために、資源の採掘期間が同じになる、競争の場合での資源1単位の採掘費用（k_A）と独占の場合での資源1単位の採掘費用（k_B）の間の関係を明らかにしてみる。まず競争の場合の資源ストックをS_Aで示し、独占の場合の資源ストックをS_Bで示し、これらの資源ストックの初期の値は同じであるものとする。この競争の場合の資源ストック（S_A）を示す式を（2.20）より（3.1）で示す。

$$S_A(t) = -\frac{1}{b}(a - k_A)t + \frac{1}{br}C_Ae^{rt} + C_{1A} \tag{3.1}$$

また、独占の場合の資源ストック（S_B）を示す式を（2.54）より（3.2）で示す。

$$S_B(t) = -\frac{1}{2b}(a - k_B)t + \frac{1}{2br}C_Be^{rt} + C_{1B} \tag{3.2}$$

競争の場合と独占の場合とで初期の資源ストックは同じでS_0あるとき、資源ストックが枯渇するまでの資源の採掘期間も同じになるためには、この二つの場合において、各時点での資源ストックの時間による1次微分（$\dot{S}$）も同じであればよいことになる。

競争の場合と独占の場合の資源ストックの時間による1次微分（3.1）と（3.2）より、(3.3)と（3.4）になる。

$$\dot{S}_A(t) = -\frac{1}{b}(a - k_A) + \frac{1}{b}C_Ae^{rt} \tag{3.3}$$

$$\dot{S}_B(t) = -\frac{1}{2b}(a - k_B) + \frac{1}{2b}C_Be^{rt} \tag{3.4}$$

（3.3）と（3.4）の各時点の資源ストックの時間による1次微分が同じであると、(3.5）になる。

$$-\frac{1}{b}(a - k_A) + \frac{1}{b}C_Ae^{rt} = -\frac{1}{2b}(a - k_B) + \frac{1}{2b}C_Be^{rt} \tag{3.5}$$

さらに競争の場合と独占の場合とで、初期の資源ストックが同じであり、資源ストックの採掘期間が同じであり、各時点での資源ストックの時間による1次微分が同じであると、各時点の資源ストックの時間による2次微分も同じになる。そこで資源ストックの時間による2次微分を求めると、競争の場合には（3.3）より（3.6）になり、独占の場合には（3.4）より（3.7）になる。$\ddot{S}_A$は競争の場合での資源ストックの時間による2次微分であり、$\ddot{S}_B$は独占の場合での資源ストックの時間による2次微分である。

$$\ddot{S}_A(t) = \frac{1}{b} rC_A e^{rt} \tag{3.6}$$

$$\ddot{S}_B(t) = \frac{1}{2b} rC_B e^{rt} \tag{3.7}$$

この二つの時間による2次微分が同じであると、(3.8) になる。

$$C_A = \frac{1}{2} C_B \tag{3.8}$$

この (3.8) を独占の場合での資源ストックの時間による1次微分を示す (3.4) に代入すると、次の (3.9) になる。

$$\dot{S}_B(t) = -\frac{1}{2b}(a - k_B) + \frac{1}{b} C_A e^{rt} \tag{3.9}$$

資源ストックの単位時間当たり変化が競争の場合と独占の場合とで同じになるためには、(3.3) と (3.9) から (3.11) の関係を得る。このことから競争の場合と独占の場合において、同じ初期の資源ストックが枯渇するまでの資源の採掘期間が同じとなる資源1単位の採掘費用k_Aとk_Bの間には (3.11) の関係があることになる。

$$-\frac{1}{b}(a - k_A) + \frac{1}{b} C_A e^{rt} = -\frac{1}{2b}(a - k_B) + \frac{1}{b} C_A e^{rt} \tag{3.10}$$

$$k_A = \frac{1}{2} k_B + \frac{1}{2} a \tag{3.11}$$

また、初期の資源ストックについて、競争の場合（$S_A(0)$）には (3.1) より (3.12) になり、独占の場合（$S_B(0)$）には (3.2) より (3.13) になる。

$$S_A(0) = \frac{1}{br} C_A + C_{1A} = S_0 \tag{3.12}$$

$$S_B(0) = \frac{1}{2br} C_B + C_{1B} = S_0 \tag{3.13}$$

この二つの初期の資源ストックはS_0で同じであるので、(3.12) と (3.13) から (3.14) になる。

$$\frac{1}{br} C_A + C_{1A} = \frac{1}{2br} C_B + C_{1B} \tag{3.14}$$

この (3.14) に (3.8) を代入すると、初期の資源ストックが二つの場合に同じであると、C_{1A}とC_{1B}は等しくなる。

$$C_{1A} = C_{1B} \tag{3.15}$$

競争の場合において、資源1単位の採掘費用（k_A）が65のときに、独占の場合と同じ資源の採掘期間となるのは、ここで導いた（3.11）によれば、a=100であるので、独占の場合において資源１単位の採掘費用（k_B）が30のときである。この（311）の関係が正しいことを調べるためには、競争の場合において、$k_A = 65$での異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値を最大にする採掘期間（T）が、独占の場合において$k_B = 30$でのその現在価値を最大にする採掘期間に等しければよい。

競争の場合でのこの資源の採掘期間の問題を解くには、第２節（1）競争の場合において、$k_A = 65$で制約条件（2.4）、(2.5)、(2.6)、(2.7）および（2.8）の下において（2.3）を最大にすることになる。この最大化の条件から期末の資源の価格、初期の資源ストックおよび期末の資源ストックについての式を得ることができ、それぞれ（2.18)、(2.21）および（2.22）になる。これまでと同様に$b = 1$および$r = 0.04$であるとすると、期末の資源の価格（$P(T)$）は100であるので、(2.18）は（3.16）になる。

$$Ce^{rT} = 35 \tag{3.16}$$

初期の資源ストックについては（2.21）より（3.17）になり、期末の資源ストックについては（2.22）より（3.18）になる。

$$S(0) = \frac{1}{0.04} C + C_1 = 1{,}000 \tag{3.17}$$

$$S(T) = -35T + \frac{1}{0.04} Ce^{0.04T} + C_1 = 0 \tag{3.18}$$

これらの三つの方程式を解くと、$T = 50.2173$、$C = 4.69574$、$C_1 = 882.6065$になる。このことから、競争の場合資源１単位の採掘費用が65のとき、資源ストックの枯渇までの資源の採掘期間は50.2173となる。第２節（2）独占の場合において$k_B = 30$のとき、異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値を最大にする資源の採掘期間が50.2173であり、同じ結果になる。したがって、資源ストックが枯渇するまでの資源の採掘期間が同じになる資源１単位の採掘費用について、競争の場合と独占の場合の間には（3.11）が成立していることになる。競争の場合資源１単位の採掘費用が65であるとき、独占の場合の資源１単位の採掘費用が30よりも小さければ、資源ストックが枯渇するまでの採掘期間は競争の場合の方が長くなる。

(2) 資源に売上税を賦課する場合

第２節では$k = 30$の資源１単位の採掘費用の下では、異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値を最大にする資源ストックの採掘期間は、競争の場合よりも独占の場合の方が長かった。ここでは経済的厚生の観点から問題があるが、資源の保全の立場から競争の場合において採掘期間を長くし、独占の場合と同じ資源ストックの採掘期間（$T = 50.2173$）になるように、各企業が資源ストックを採掘して市場で売るときに売上税を賦課することを検討

する[17]。ここで、市場での需要関数は（2.1）であるとする。

まず、資源を採掘し市場で売るときに各企業に売上税を賦課すると、各企業の税引き後の利潤（π_i）は（3.19）になる。jは売上税率であり、jPq_iは各企業が納める売上税の税額である。

$$\pi_i = Pq_i - jPq_i - kq_i \tag{3.19}$$

各企業に売上税を賦課することにより、異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値の最大化の課題を制約条件（3.21）、（3.22）、（3.23）および（3.24）の下で、（3.20）を最大にすることによって示す。ここで各企業は同じ初期の資源ストック（$S_i(0)$）を持ち、同じ様に行動するものと仮定する。

最 大 化　$J = \int_0^{50.2173}(Pq_i - jPq_i - kq_i)e^{-rt}dt$　(3.20)

制約条件　$\dot{S}_i(t) = -q(t)$　(3.21)

$S_i(0) = S_{i0}$　(3.22)

$S_i(T) = 0$　(3.23)

$P - jP - k > 0$　(3.24)

そこでまずハミルトン関数を定式化すると、（3.25）になる。

$$H = (Pq_i - jPq_i - kq_i)e^{-rt} + \lambda(-q_i) \tag{3.25}$$

（3.20）を最大にする必要条件を求めると、第1の条件はハミルトン関数をコントロール変数である資源の採掘量（q_i）で最大にすることであり、微分すると（3.27）になる。

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = (P - jP - k)e^{-rt} - \lambda = 0 \tag{3.26}$$

$$(P - jP - k)e^{-rt} = \lambda \tag{3.27}$$

（3.20）が最大になる第2の条件は、ハミルトン関数、補助変数（λ）および状態変数である資源ストック（S）について（3.28）になることである[18]。

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S_i} = 0 \tag{3.28}$$

（3.28）から（3.29）になる。

$$(P - jP - k)e^{-rt} = \lambda = C\ （定数） \tag{3.29}$$

この（3.29）から、競争の場合各企業が異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値を最大にする条件は、各時点の利子率により割り引かれた資源1単位の売上税を納めた後の利潤の現在価値が時間を通じて一定であることを示している。

（3.29）を時間で微分すると（3.30）になり、資源1単位の売上税を納めた後の税引き後の利潤の増加率は利子率に等しいことを示しており、これがここでのホテリングのルールになる。

$$\frac{d(P - jP - k)/dt}{P - jP - k} = r \tag{3.30}$$

需要関数である（2.1）から、各企業の資源の採掘量（q_i）を合計した資源の採掘量（q）と価格（P）の間の関係は（3.31）になる。

$$q(t) = \frac{1}{b}(a - P(t)) \tag{3.31}$$

（3.21）と（3.31）の二つの式から、各企業の資源ストック（S_i）を合計した資源ストックの時間による1次微分（$\dot{S}(t)$）については（3.32）になる。

$$\dot{S}(t) = -\frac{1}{b}(a - P(t)) \tag{3.32}$$

（3.29）から資源の価格（P）は（3.33）になる。

$$P(t) = \frac{1}{1-j}k + \frac{1}{1-j}Ce^{rt} \tag{3.33}$$

この（3.33）を（3.32）に代入すると、資源ストックの時間による1次微分（$\dot{S}$）は（3.34）になる。

$$\dot{S}(t) = -\frac{1}{b}a + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}k + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}Ce^{rt} \tag{3.34}$$

（3.34）を時間で積分すると、資源ストック（S）は（3.35）になる。

$$S(t) = -\frac{1}{b}at + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}kt + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}\frac{1}{r}Ce^{rt} + C_1 \tag{3.35}$$

（3.23）より期末において資源ストックはゼロになるので、資源の採掘量もゼロとなり、(2.1)の需要関数から期末の価格（$P(T)$）はaに等しく（3.36）になる。

$$P(T) = a \tag{3.36}$$

この（3.36）と価格の式である（3.33）から、期末の価格は（3.37）になる。

$$P(T) = \frac{1}{1-j}k + \frac{1}{1-j}Ce^{rT} = a \tag{3.37}$$

各企業の初期の資源ストックは（3.22）からS_{i0}であり、これを合計した初期の資源ストックはS_0である。これと資源ストックの式である（3.35）から（3.38）になる。

$$S(0) = \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}\frac{1}{r}C + C_1 = S_0 \tag{3.38}$$

また（3.23）から各企業の期末の資源ストックはゼロであるので、期末の資源ストック（$S(T)$）もゼロとなり、（3.35）から（3.39）になる。

$$S(T) = -\frac{1}{b}aT + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}kT + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}\frac{1}{r}Ce^{rT} + C_1 = 0 \tag{3.39}$$

T=50.2173のとき、e^{rT}=7.453562となり、またa=100、k=30、S_0=100、b=1、r=0.04であるとすると、期末の価格を示す（3.37）は（3.40）になる。

$$\frac{1}{1-j} \times 30 + \frac{1}{1-j}C \times 7.453562 = 100 \tag{3.40}$$

初期の資源ストックを示す（3.38）は（3.41）になる。

$$\frac{1}{1-j} \times \frac{1}{0.04} \times C + C_1 = 1{,}000 \tag{3.41}$$

期末の資源ストックを示す（3.39）は（3.42）になる。

$$-5{,}021.73 + 1{,}506.519\frac{1}{1-j} + 186.3391\frac{1}{1-j}C + C_1 = 0 \tag{3.42}$$

これらの三つの方程式である(3.40)、(3.41)および(3.42)からj、CおよびC_1の値を求めると、j=0.53847、C=2.1672、C_1=882.6082を得る。競争の場合において、資源の採掘期間が独占の場合での50.2173と同じになるように、資源の販売時に売上税を各企業に賦課したとき、(3.20)を最大にするその税率は0.53847ということになる。この税率よりも高い売上税を各企業に賦課した場合には、(3.20) を最大にする資源の採掘期間は独占の場合の50.2173よりも長くなる。逆に売上税の税率が0.53847よりも小さいときには、競争の場合において資源の採掘期間はその50.2173よりも短くなる。

また、j=0.53847、C=2.1672およびC_1=882.6082であることから、(3.33) の資源の価格を示す式は (3.43) になる。

$$P(t) = 65.001 + 4.69567e^{0.04t} \tag{3.43}$$

(3.35) の資源ストックを示す式は (3.44) になる。

$$S(t) = -34.999t + 117.3918e^{0.04t} + 882.6082 \tag{3.44}$$

資源の採掘量を示す式は (3.31) と (3.43) から (3.45) になる。

$$q(t) = 34.999 - 4.69567e^{0.04t} \tag{3.45}$$

ここで導いた ($P(t)$)、($S(t)$) および ($q(t)$) についての (3.43)、(3.44) および (3.45) の三つの式を、第２節 (2) 独占の場合の (2.61)、(2.62) および (2.60) と比較すると、資源の採掘費用を含む競争の場合は、売上税の税率が0.53847のとき、資源の採掘費用を含む独占の場合とほぼ同じ各時点の資源の価格、資源ストックおよび資源の採掘量になっている。

(3.43) から初期の資源の価格 ($P(0)$) は69.69667になり、期末の価格 ($P(T)$) は100になり、資源の価格の時間による１次微分 ($\dot{P}(t)$) は$0.187827e^{0.04t}$になる。資源の採掘量を示す (3.45) から初期の資源の採掘量 ($q(0)$) は30.3033であり、期末の資源の採掘量 ($q(T)$) はゼロであり、資源の採掘量の時間による１次微分 ($\dot{q}(t)$) は$-0.187827e^{0.04t}$である。

ここで資源の採掘期間 (T) が50.2173であるとき、(3.20) の異時点間にわたる利子率により割り引かれた税引き後の利潤の現在価値は、各企業について合計すると (3.46) で示すことができ、これにj=0.53847、(3.43) および (3.45) を代入すると2,167.11になる。

$$J = \int_0^{50.2173}(Pq - jPq - 30q)e^{-0.04t}dt \tag{3.46}$$

$$J = \int_0^{50.2173} 2.1672(34.999 - 4.69567e^{0.04t})dt$$

$$J = 2{,}167.11$$

この利潤の割引現在価値は独占の場合には22,958.7であるのに対し、売上税を賦課した場合には2,167.11であり、独占の場合よりも小さい。この売上税の税額 (T) を示す式は (3.47)

となり、この式に（3.43）と（3.45）を代入し、計算すると20,791.3になる。

$$T = \int_0^{50.2173} jPqdt \tag{3.47}$$

$$T = 20{,}791.3$$

資源の採掘費用を含む場合について、資源１単位の採掘費用（k）が競争の場合と独占の場合とでは同じであるとすると、独占の場合の方が資源ストックが枯渇するまでの採掘期間は長い。次に、競争の場合に各企業に売上税を賦課するときに、この売上税の税率をいくらにすればこの資源の採掘期間が独占の場合と同じになるのかという問題を、売上税の税率と資源１単位の採掘費用との間の関係で考えてみる。

まず、売上税が賦課されている場合での資源ストックを、(3.35) より（3.48）で示す。

$$S_C(t) = -\frac{1}{b}at + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}kt + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}\frac{1}{r}C_C e^{rt} + C_{1C} \tag{3.48}$$

独占の場合での資源ストックは（2.54）であり、これをここでは（3.49）で示す。

$$S_B(t) = -\frac{1}{2b}(a-k)t + \frac{1}{2br}C_B e^{rt} + C_{1B} \tag{3.49}$$

ここで売上税の賦課が行われている競争の場合とそれが行われていない独占の場合とで、資源の採掘期間が同じであるためには、初期の資源ストックがS_0で同じであるので、二つの場合において同じように採掘が行われ、各時点において資源ストックの時間による１次微分が同じであるとよい。資源ストックの時間による１次微分は、この競争の場合には (3.48) から (3.50) になり、独占の場合には（3.49）から（3.51）になる。

$$\dot{S}_C(t) = -\frac{1}{b}a + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}k + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}C_C e^{rt} \tag{3.50}$$

$$\dot{S}_B(t) = -\frac{1}{2b}(a-k) + \frac{1}{2b}C_B e^{rt} \tag{3.51}$$

各時点の資源ストックの時間による１次微分が同じであると、(3.50) と（3.51）から（3.52）になる。

$$-\frac{1}{b}a + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}k + \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}C_C e^{rt} = -\frac{1}{2b}(a-k) + \frac{1}{2b}C_B e^{rt} \tag{3.52}$$

この独占の場合と競争の場合において、初期の資源ストックが同じで、資源の採掘が同じように行われると、資源ストックの時間による２次微分も同じになる。(3.48) の時間による２次微分は（3.53）に、(3.49) の時間による２次微分は（3.54）になる。

$$\ddot{S}_C(t) = \frac{1}{b}\frac{1}{1-j}rC_C e^{rt} \tag{3.53}$$

$$\ddot{S}_B(t) = \frac{1}{2b}rC_B e^{rt} \tag{3.54}$$

これらの二つの時間による２次微分が各時点において等しいと、(3.53) と（3.54）から（3.55）

になる。

$$\frac{1}{b}\frac{1}{1-j}C_C e^{rt}=\frac{1}{2b}C_B e^{rt} \tag{3.55}$$

この（3.55）を（3.52）に代入すると（3.56）になる。

$$-\frac{1}{b}a+\frac{1}{b}\frac{1}{1-j}k=-\frac{1}{2b}(a-k)$$

$$j=\frac{a-k}{a+k} \tag{3.56}$$

資源が枯渇するまでの採掘期間が、売上税を賦課した競争の場合と独占の場合において同じになる売上税の税率を、この（3.56）によって示すことができる。この（3.56）において、資源１単位の採掘費用（k）は30であり、aは100であるので、売上税の税率（j）は0.53846となり、(3.40)、（3.41）および（3.42）の連立方程式で導いた結果である0.53847とほぼ同じになる。このことからこの（3.56）が成立していることになる。この（3.56）に基づけば、資源１単位の採掘費用（k）が40であるとこの売上税の税率は0.42857であり、資源１単位の採掘費用が増加すると、売上げ税を賦課した競争の場合と独占の場合で資源の採掘期間が同じになる売上税の税率は低下する(19)。

むすび

第１節では数学的にHotelling［3］のモデルに従い、採掘費用を含めずに異時点間にわたる利子率により割り引かれた売上収入の現在価値の最大化の問題を分析してみた。ホテリングにおいては競争の場合での各企業の行動と一つの市場での採掘量や価格の関係が必ずしも明確でなかったが、これをできる限りミクロ経済学の立場から明確にしてみた。この最大化を行うときに、本稿ではポントリヤーギンの最大値原理を使ってみた。このことにより、競争の場合と独占の場合についてホテリングのルールと同じ結果を得た。さらに本稿では一つ例をあげ、この現在価値の最大化を実現する各時点の最適な資源の価格、資源の採掘量、資源ストック、資源ストックが枯渇するまでの採掘期間を競争の場合と独占の場合について導いてみた。

第２節では、ホテリングのモデルとは異なり資源の採掘費用を明確に導入し、異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値の最大化の問題を、競争の場合と独占の場合について考え、資源の採掘費用を含む場合のホテリングのルールとはどのようなものであるかを明らかにした。さらに、一つの例をあげ、競争の場合と独占の場合について同じ資源１単位の採掘費用の下で、この現在価値の最大化を実現する各時点の資源の価格、採掘量、資源ストックおよび資源の採掘期間を示した。初期の資源ストックが競争の場合と独占の場合とで同じであるとき、競争の場合には独占の場合よりも初期の資源の価格は低く、その後より急速に上昇し、初期の資源の採掘量は大きく、その後より急速に減少するという結果を導いた。また資源ストックが枯渇するまでの採掘期間は競争の場合には独占の場合よりも短いということであっ

た。

第３節では、競争の場合と独占の場合とで初期の資源ストックが同じとき、資源ストックが枯渇するまでの採掘期間も同じであるためには、独占の場合での資源１単位の採掘費用が競争の場合と比較してどの程度低い必要があるかを明らかにし、二つの場合において資源の採掘期間が同じとなる資源1単位の採掘費用の間の関係を導いた。さらに、経済的厚生の観点から問題があるが、資源ストックの保全の立場から、競争の場合と独占の場合において資源１単位の採掘費用が同じであるとき、競争の場合での資源の採掘期間を長くして、独占の場合の資源の採掘期間と同じになるようにするためには、競争の場合に売上税をどの程度採掘される資源に賦課すればよいのかを明らかにしてみた。

注

(1) Hotelling［3］p.141.

(2) Hotelling［3］p.140.

(3) ポントリヤーギンの最大値原理では、λは補助変数（auxiliary variable）であり、経済的にはシャドープライス（shadow price）を示している。(Takayama［7］p.621.)

(4) $\lambda = \mu e^{-rt}$と定めると、(1.9）は$P = \mu$となる。μは地価の資源のシャドープライスであり、λは利子率により割り引かれた地価の資源のシャドープライスであると解釈される。(1.9）は最適状態では市場での資源の価格は地価の資源のシャドープライスに等しいことを示している。

(5) 小山［8］557-558頁。

(6) Hotelling［3］p.140.

(7) ホテリングのルールは、鉱山保有者が資源を採掘し販売すると収入を得、その資金を貸すと利子を得ることができる。他方採掘しないで保存すると鉱床の値上がりの価値を得る。鉱山保有者が資源をどの程度採掘するかは、利子率と資源の将来の価格の関係によって決定されるとも解釈されることができる。(時政［9］31頁)

(8) 期末では資源ストックがゼロであり、資源の採掘量もゼロであるということは、企業が生産計画を立てるさいに、代替資源の新技術であるバックアップストップ技術の利用が前提とされている。(Conrad［1］p82.訳書.93)

(9) Hotelling［3］においては、制約条件$\int_0^\infty q dt = S_0$の下で独占企業の売上収入である$\int_0^\infty P(q) q e^{-rt} dt$の最大化の問題を変分法を使って解いている。(Hotelling［3］pp.146-148)

(10) 小山［8］557-559頁。

(11) Hotelling［3］p.147.

(12) Hotelling［3］においては、独占の場合での異時点間の利子率により割り引かれた売上収入の現在価値を最大にする資源の採掘期間を求めるのに、変分法と近似値を見つけるニュートン法を使っている。(Hotelling［3］pp.152-157)

(13) 需要の弾力性（$\eta(q)$）を（A）で定義することができ、$\eta(q)>0$であると仮定する。

$$\eta(q) = -(P(q)/q)(dq/dP(q)) \tag{A}$$

独占の場合の限界収入を$M(q)$とすると、この限界収入を需要の弾力性を使って示すと（B）になる。

$$M(q) = P(q)(1 - 1/\eta(q)) \tag{B}$$

$\alpha(q)$を（C）で示すと、この限界収入は（D）になる。

$$\alpha(q) = 1 - 1/\eta(q) \tag{C}$$

$$M(q) = P(q)\,\alpha(q) \tag{D}$$

最適解を持つためには、限界収入は正でなければならないので、$\alpha(q)>0$となるものと仮定する。

この（D）の対数をとり時間（t）で微分すると、（E）になる。

$$\frac{\dot{M}(q)}{M(q)} = \frac{\dot{P}(q)}{P(q)} + \frac{\dot{\alpha}(q)}{\alpha(q)} \tag{E}$$

ここで（1.50）より、$\dot{M}(q)/M(q)$はrに等しいので、（E）は（F）になる。

$$r = \frac{\dot{P}(q)}{P(q)} + \frac{\dot{\alpha}(q)}{\alpha(q)} \tag{F}$$

（F）において、$\dot{\alpha}(q)$と$\dot{P}(q)/P(q)$との関係から次の（G）、（H）および（I）の三つの場合が生じる。

$$\frac{\dot{\alpha}(q)}{\alpha(q)} < 0 \quad のとき \quad \frac{\dot{P}(q)}{P(q)} > r \tag{G}$$

$$\frac{\dot{\alpha}(q)}{\alpha(q)} = 0 \quad のとき \quad \frac{\dot{P}(q)}{P(q)} = r \tag{H}$$

$$\frac{\dot{\alpha}(q)}{\alpha(q)} > 0 \quad のとき \quad \frac{\dot{P}(q)}{P(q)} < r \tag{I}$$

（C）から$\dot{\alpha}(q)$について（J）を得、$\dot{\alpha}(q)$は$d\eta(q)/dq$と関係する。

$$\dot{\alpha}(q) = \frac{1}{\eta(q)^2}\frac{d\eta(q)}{dq}\frac{dq}{dt} \tag{J}$$

需要関数が（1.35）で$P=a-bq$、$a>0$、$b>0$あるとき、（1.58）から$dq/dt<0$であり、需要の弾力性（$\eta(q)$）は（K）になり、この需要の弾力性をqで微分すると（L）になる。

$$\eta(q) = \left(\frac{a}{q} - b\right) \times \left(\frac{1}{b}\right) \tag{K}$$

$$\frac{d(\eta(q))}{dq} = -\frac{a}{bq^2} < 0 \tag{L}$$

需要関数が（1.35）であるときには、（J）と（L）から$\dot{\alpha}(q)>0$となり、（I）と同じ結果になる。この（1.35）の需要関数は（G）、（H）および（I）の三つのうちの一つの場合を扱っており、独占ではこの（I）の場合においてのみ（M）の結果を得ることになる。（Stiglitz［6］p.657と時政［9］55-56頁。）

$$\frac{\dot{P}(q)}{P(q)} < r \tag{M}$$

(14) 資源の採掘費用については、この仮定以外にも考えられ、Pindyck［5］では資源ストックの確認埋蔵量に依存するモデルになっている。

(15) 小山［8］557-559頁。

(16) 小山［8］557-559頁。

(17) Hotelling［3］では、独占の場合において鉱山から採掘される資源1単位に従量税である天然資源採掘税（severance tax）を賦課したときの効果を分析している。この天然資源採掘税により、資源ストックの枯渇までの採掘期間が長くなること、また社会的効用という意味での総社会的価値（total social value）が低下することを示している（Hotelling［3］pp.165-169.）。また、Livernois［4］に

おいては企業への累進的な天然資源採掘税と利潤税の資源の採掘への影響を分析している。

⒅　小山［8］540-541頁。

⒆　独占の場合の資源の採掘期間と同じになるように、競争の場合に資源の採掘量に従量税であるここで使われている天然資源採掘税を課税する同様の問題を考えてみる。その資源1単位当たりの税率をmとすると、各企業の資源の販売による利潤を示す式は（a）になる。資源の需要関数は（2.1）と同じで$P = a - bq$であるとする。

$$\pi_i = Pq_i - (k + m)q_i \tag{a}$$

ここで、資源の採掘期間（T）は50.2173であり、制約条件（3.21）、（3.22）、（3.23）および$P - (k + m) > 0$の制約条件の下で、（b）の異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値を最大にしてみる。

$$J = \int_0^T (Pq_i - (k + m)q_i)e^{-rt}dt \tag{b}$$

ハミルトン関数は（c）になる。

$$H = (Pq_i - (k + m)q_i)e^{-rt} + \lambda(-q_i) \tag{c}$$

この問題を$a = 100$、$k = 30$、$r = 0.04$、$b = 1$、$S_0 = 1{,}000$、$T = 50.2173$について解くと、$m = 35$となり、資源の価格（P）、資源の採掘量（q）、資源ストック（S）を示す式は（d）、（e）、（f）になる。

$$P(t) = 65 + 4.69575e^{0.04t} \tag{d}$$

$$q(t) = 35 - 4.69575e^{0.04t} \tag{e}$$

$$S(t) = -35t + 117.39375e^{0.04t} + 882.606 \tag{f}$$

（b）の異時点間にわたる利子率により割り引かれた利潤の現在価値は$J = 11{,}479$になる。またこの天然資源採掘税の税額はmS_0であり35,000になる。

また、独占の場合と天然資源採掘税を賦課された競争の場合において、初期の資源ストックが同じであるとき、資源ストックが枯渇するまでの採掘期間が同じになる天然資源採掘税の税率（m）と資源1単位の採掘費用（k）の間には（g）の関係が成立する。この採掘費用は競争の場合と独占の場合とで同じであり、aは（2.1）の需要関数での定数である。

$$m = \frac{1}{2}(a - k) \tag{g}$$

$a = 100$であり、$k = 30$であるとすると$m = 35$となり、これまでの分析と同じ結果となる。天然資源採掘税の税率（m）が35よりも小さいと、資源の採掘期間は競争の場合には独占の場合よりも短くなる。

参考文献

［1］ Conrad,J.M.,*Resource Economics*,Cambridge University Press,1999.岡　敏弘・中田　実訳『資源経済学』岩波書店、2002年。

［2］ Devarajan,S. and A.C. Fisher,"Hotelling's Economics of Exhaustible Resources:Fifty Years Later", *Journal of Economic Literature*,Vol.19,1981,pp65-73.

［3］ Hotelling,H.,"The Economics of Exhaustible Resources" *Journal of Political Economy*,Vol.39,1931, pp.137-175.

［4］ Livernois,J.,"A Note on the Effect of Tax Brackets on Non-renewable Resource Extraction" *Journal of Environmental Economics and Management*,Vol.22,1992,pp.272-280.

[5] Pindyck,R.S.,"The Optimal Exploration and Production of Nonrenewable Resources",*Journal of Political Economy*,Vol.86,1978,pp.841-861.

[6] Stiglitz,J.E.,"Monopoly and the Rate of Extraction of Exhaustible Resources",*The American Economic Review*,Vol.66,1976,pp.655-660.

[7] Takayama,A.,*Mathematical Economics*,The Dryden Press,1974.

[8] 小山昭雄著『経済数学教室（8ダイナミック・システム）』岩波書店、1995年。

[9] 時政　勗著『枯渇性資源の経済分析』（児玉正憲編『経済の情報と数理(8)』）牧野書店、1992年。

なお、本稿の作成において夏目　隆神戸大学名誉教授のご指導を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。