C.リーおよびK.G.ロフグレンによる再生可能資源の最適利用
──チチルニスキー基準による資源配分──

森　岡　　洋

序論

最適成長論では、将来の時点まで考慮して経済分析を行うのであるが、そのとき将来の効用については一定の割引率で割り引き、その現在価値の分析が行われてきた。このような分析方法をここでは功利主義者による分析方法と呼ぶことにする。このように将来の効用を割り引くことは、通常の消費財であれば一つの合理性を示すと言える。だが、近年では資源問題や環境問題にこのような分析方法を適用することには批判が出ている。例えば 30 年後、50 年後あるいは 100 年後を利子率で割り引くと、現在価値は 3 分の 1 、10 の 1 あるいは 50 の 1 ということになるかもしれない。この場合、現在世代が将来世代の効用の現在価値をきわめて低く評価していることになる。

本稿では将来の効用への割引に焦点を当て、再生可能資源の長期的な最適利用の問題を考えてみる。そこでまず第 1 節では従来の功利主義者の分析方法を述べる。第 2 節では、将来の効用を割り引かないで再生可能資源の長期的な最適利用の問題を分析する立場を、資源保護論者の立場と呼び、この立場での分析方法について述べる。

ただ将来の効用を割り引かない場合には、将来世代の効用を高く評価しすぎるのでないかという批判もある。G.M.ヒール(Heal)が[7]で述べているように、将来の効用をどのように割り引き、評価すべきであるかということが近年経済学者の間で議論されるようになってきた。このような効用の評価の議論において、将来の無限の時点の効用も評価に含めるべきであるという一つの解決方法を提案したのが G.チチルニスキー(Chichilnisky)である。第 3 節では G.チチルニスキーの厚生関数とはどのようなものであるのか、またこの厚生関数に基づく再生可能資源の長期的な最適利用の問題を述べる。

資源問題や環境問題を考慮すると、将来の効用について割引率を一定とするのは適切でなく、時間が経過するにつれてその割引率を引き下げるべきであるということが M.L.ワイツマン(Weitzman)[13]などによって議論されるようになった。本稿ではこの議論と第 3 節までの議論を踏まえた C.リー(Li)と K.G.ロフグレン(Löfgren)による再生可能資源の長期的な最適利用の方法とはどのようなものであるかを明らかにする。

1．功利主義者の異時点間にわたる厚生の最大化

経済学では、異時点間にわたる厚生の最大化を考える場合に、通常将来の効用を割引率で割り引くことを考える。この効用の割引率をδとする。また効用の対象になるものは通常消費$c(t)$のみであるが、人々が保有する再生可能資源の資源ストック $x(t)$も人々の効用の対象になるものと考える。なお以後、それぞれの時点tの人々の消費$c(t)$と資源ストック$x(t)$については、簡単化のために単にcとxのように示し、時点tの記号を省略し、他の記号についても時点tの記号を省略する。

ここで効用関数を次の(1-1)であるとする[(1)]。

$$u = u(c, x) \tag{1-1}$$

ただし、この効用関数についてはcとxについて分離され、(1-2)になるものとする。

$$u = u(c) + u(x) \tag{1-2}$$

この効用関数(1-2)については次の性質を仮定する[(2)]。

$$u_c > 0 \quad u_{cc} < 0 \quad u_x > 0 \quad u_{xx} < 0 \quad u_{cx} = 0 \tag{1-3}$$

また再生可能資源の再生関数$f(x)$は(1-4)であるとする。yは再生可能資源の時点tでの再生量である。

$$y = f(x) \tag{1-4}$$

この再生関数については次の(1-5)から(1-10)の性質を仮定する。

$$f(x) = 0 \quad x = 0 \text{ および } x \geq x^c \text{ について} \tag{1-5}$$

$$f(x) > 0 \quad 0 < x < x^c \text{ について} \tag{1-6}$$

$$f'(x) > 0 \quad 0 < x < \hat{x} \text{ について} \tag{1-7}$$

$$f'(x) = 0 \quad x = \hat{x} \text{ について} \tag{1-8}$$

$$f'(x) < 0 \quad \hat{x} < x < x^c \text{ について} \tag{1-9}$$

$$f''(x) < 0 \quad 0 < x < x^c \text{ について} \tag{1-10}$$

ここで、x^cは生物的収容能力であり、資源ストックxはこの生物的収容能力を超えることはないものとする。このことから資源ストックは$0 \leq x \leq x^c$の間にあるものと考える。(1-5)から再生可能資源は資源ストックがゼロでは再生がおこなわれず、生物的収容能力に達しても再生が行われないものとする。またこの資源の再生関数は資源ストックが少ないとき、資源ストックが増加するにつれて再生量が増加し、資源ストックが$\hat{x}$になると最大になるものとする。それ以上資源ストックが増加すると資源の再生量は減少し、資源ストックがx^cになると、その再生量はゼロになるものとする。図１で横軸に資源ストックxをとり、縦軸に資源の再生量$f(x)$をとると、資源の再生関数は原点から右上がりとなり、さらにxが増加すると$\hat{x}$から右下がりとなる曲線になる[(3)]。

再生された資源は消費cと資源ストックの増加になるものとする。このとき資源ストックの変化$\dot{x}$を(1-11)で示すことができる。

$$\dot{x} = f(x) - c \tag{1-11}$$

資源ストックの変化 $\dot{x}$ は再生可能資源の再生量 $f(x)$ と消費 c との差になる。その再生量が消費よりも大きければ資源ストックの変化は正になり、逆にその再生量が消費よりも小さければ、資源ストックの変化は負になる。その再生量が消費と等しくなれば、資源ストックは一定に維持される。図1の縦軸に資源の再生産量に加えて消費 c をとる。

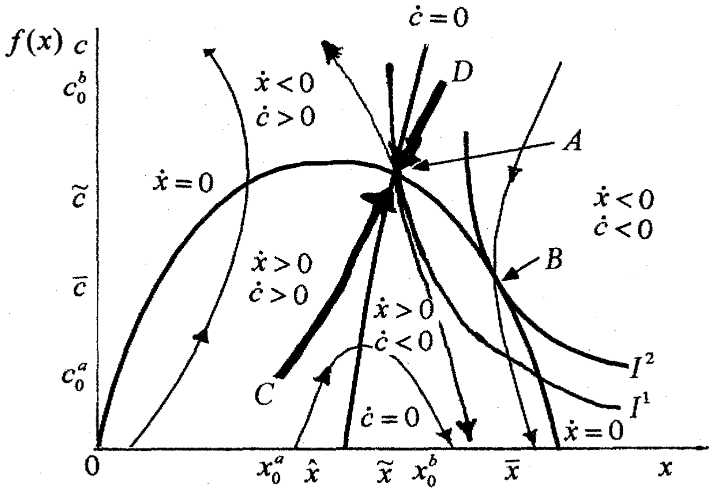

図1

この図1で $\dot{x}=0$ となるのは、消費 c が資源の再生量 $f(x)$ と等しくなる(1-12)のときであり、消費は $f(x)$ の曲線上にある。

$$c = f(x) \tag{1-12}$$

消費が $f(x)$ の曲線よりも下にあると資源の再生量 $f(x)$ は消費 c よりも大きく、資源ストックの変化は正になる。他方消費が $f(x)$ の曲線よりも上にあると資源の再生産量は消費よりも小さく、資源ストックの変化は負になる。

功利主義者の立場においては、厚生関数は(1-13)のような無限の時間的視野での効用を割引率 δ で割り引いた割引現在価値であると定義する。

$$W = \int_0^\infty u(c(t), x(t)) e^{-\delta t} dt \tag{1-13}$$

(1-15)は初期の資源ストック $x(0)$ が x_0 であることを示している。$\delta > 0$ で一定であると仮定する。功利主義者の立場においては、(1-15)と(1-16)の制約条件の下で異時点間の効用の割引現在価値(1-14)を最大にすることが課題となる。

最大化　$\int_0^\infty u(c(t), x(t)) e^{-\delta t} dt$　(1-14)

制約条件　$x(0) = x_0$　(1-15)

$\dot{x} = f(x) - c$　(1-16)

この功利主義者の立場においては、それぞれの時点の効用を割引因子(discount factor) $e^{-\delta t}$

で評価しており、$\delta>0$ でかつ一定であると、時間が経過し遠い将来の時点になるほど効用を低く評価していることになる。この功利主義者の立場においては、将来世代の効用をあまり考慮せず、場合によっては無視して、現在世代の効用が大きくなるように資源の利用が行われることになる。なお、数学的には $\delta>0$ でかつ一定であると、時間が経過するにつれて割引因子がゼロに近づくことから、(1-14)の積分の値は有限になり、その最大化は可能になる。

次に(1-15)と(1-16)を制約条件として異時点間の効用の割引現在価値である(1-14)を最大にする問題を、ポントリヤーギンの最大値原理を使って解いてみる。そこでまずハミルトン関数を定式化すると(1-17)になる。λ は資源ストックのシャドープライスである。

$$H=u(c,x)+\lambda(f(x)-c) \tag{1-17}$$

(1-14)が最大となる必要条件を求めると、まず第1にハミルトン関数をコントロール変数である消費により最大化することであり、(1-18)を得る。

$$\frac{\partial H}{\partial c}=u_c-\lambda=0$$

$$\lambda=u_c \tag{1-18}$$

(1-18)から、資源ストックのシャドープライスは消費による限界効用に等しくなる。

(1-14)が最大となる第2の必要条件は、資源ストックのシャドープライスの現在価値の変化がハミルトン関数の現在価値の x による偏微分の負の値に等しいことを示している。

$$\frac{d(\lambda e^{-\delta t})}{dt}=-\frac{\partial(He^{-\delta t})}{\partial x} \tag{1-19}$$

この(1-19)から(1-20)を得る。

$$\dot{\lambda}e^{-\delta t}-\delta\lambda e^{-\delta t}=-u_x e^{-\delta t}-\lambda f'(x)e^{-\delta t}$$

$$\dot{\lambda}-\delta\lambda+\lambda f'(x)+u_x=0 \tag{1-20}$$

(1-14)が最大となる第3の必要条件は(1-21)の横断条件である。

$$\lim_{t\to\infty}\lambda e^{-\delta t}=0 \tag{1-21}$$

ここで(1-14)が最大となる必要条件である(1-18)の両辺を時間で微分すると、(1-3)から $u_{cx}=0$ であるので、(1-22)になる。

$$\dot{\lambda}=u_{cc}\dot{c} \tag{1-22}$$

この(1-22)と(1-18)を(1-20)に代入すると、(1-23)になる。

$$u_{cc}\dot{c}=\delta u_c-u_c f'(x)-u_x$$

$$\dot{c}=\frac{1}{u_{cc}}(\delta u_c-u_c f'(x)-u_x) \tag{1-23}$$

消費 c は(1-14)を最大にするコントロール変数であり、また(1-23)は(1-14)が最大となる必要条件から導かれているので、この(1-23)は(1-14)を最大にする消費の変化を示している。

(1-14)を最大にする微分方程式の系は(1-16)と(1-23)になる。この微分方程式の系を使って

(1-14)が最大となる最適経路$(x(t),c(t))$を図1で位相図により示してみる。資源ストックの変化$\dot{x}$についてはすでに示したので、消費の変化$\dot{c}$について示す。

(1-23)において$\dot{c}=0$となるとき、(1-24)になる。

$$\delta u_c - u_c f'(x) - u_x = 0 \tag{1-24}$$

この(1-24)は(1-25)となり、$f'(x)-\delta$が効用の限界代替率$-u_x/u_c$に等しくなっている。また(1-3)から$u_c>0$および$u_x>0$であるので$f'(x)-\delta$は負になる(4)。

$$(f'(x)-\delta)u_c = -u_x$$

$$f'(x)-\delta = -\frac{u_x}{u_c} < 0 \tag{1-25}$$

この$\dot{c}=0$となる経路$(x(t),c(t))$はどのようなものであるかを述べてみる。そこで(1-24)をcとxで微分すると(1-26)になる。

$$(\delta u_{cc} - u_{cc} f'(x))dc + (-u_c f''(x) - u_{xx})dx = 0$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{u_c f''(x) + u_{xx}}{(\delta - f'(x))u_{cc}} > 0 \tag{1-26}$$

(1-3)より$u_c>0$、$u_{cc}<0$、$u_{xx}<0$であり、(1-10)より$f''(x)<0$であり、(1-25)より$\delta - f'(x)>0$である。このことから(1-26)の分母も分子も負となり、(1-26)は正となっている。(1-26)から$\dot{c}=0$となる曲線は図1において右上がりの曲線になる。なお(1-23)から$\dot{c}=0$の曲線の左側では$\dot{c}>0$となり、右側では$\dot{c}<0$となる。

$\dot{x}=0$となる(1-12)と$\dot{c}=0$となる(1-25)の二つの式を同時に満たすxとcをそれぞれ$\tilde{x}$と$\tilde{c}$とする。この$\tilde{x}$と$\tilde{c}$では(1-12)は(1-27)になり、(1-25)は(1-28)となり、$(\tilde{x},\tilde{c})$の定常状態が(1-14)を最大にする最適経路になる。この$(\tilde{x},\tilde{c})$を、E.ヘルプス(Phelps)が[12]で述べている黄金律経路と異なるために、D.キャッス(Cass)に従い修正黄金律経路(a modified golden rule path)と呼ぶことにする(5)。この$(\tilde{x},\tilde{c})$を図1では点Aで示しており、この$(\tilde{x},\tilde{c})$では$\dot{x}=0$となる曲線と$\dot{c}=0$となる曲線が交わり、(1-27)と(1-28)が同時に満たされている。

$$\tilde{c} = f(\tilde{x}) \tag{1-27}$$

$$f'(\tilde{x})-\delta = -\frac{u_x(\tilde{c},\tilde{x})}{u_c(\tilde{c},\tilde{x})} \tag{1-28}$$

(1-3)の効用関数の性質から、効用の無差別曲線をI^1、I^2、のように描くことができる。効用の限界代替率($-u_x/u_c$)は無差別曲線の接線の傾きになることから、(1-28)はこの接線の傾きが$f'(\tilde{x})-\delta$に等しいことを示している。この点Aの$(\tilde{x},\tilde{c})$では、消費は(1-27)から$f(\tilde{x})$に等しく、$\tilde{c}$になる。

(1-11)と(1-23)から、(1-14)が最大となるxとcについての位相図を描くことができる。初期の資源ストックx_0が$\tilde{x}$よりも小さくx_0^aであるときには、初期の消費をc_0^aに定め、点Cの(x_0^a,c_0^a)から$(\tilde{x},\tilde{c})$へ右上に行く経路が最適経路になる。逆に初期の資源ストックが大きくx_0^bであるときには、初期の消費をc_0^bに定め、点Dの(x_0^b,c_0^b)から$(\tilde{x},\tilde{c})$へ左下に行く経路が最適経路になる。

ただし、図1において点CとDから$(\tilde{x},\tilde{c})$へ行く経路が$(\tilde{x},\tilde{c})$に到達できるためには、$(\tilde{x},\tilde{c})$が鞍点でなくてはならない。このことを確かめるために(1-11)と(1-23)の微分方程式の系を定常状態の近傍で線形近似すれば(1-29)になる[6]。右辺の行列をAとすると、その成分はグリーン黄金律経路$(\tilde{x},\tilde{c})$での数値である。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f'(\tilde{x}) & -1 \\ -\dfrac{1}{u_{cc}}(u_c f''(x)+u_{xx}) & \delta-f'(\tilde{x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-\tilde{x}\\ c-\tilde{c}\end{bmatrix} \tag{1-29}$$

この行列Aの特性方程式は(1-30)になる。

$$\mu^2-(f'(\tilde{x})+\delta-f'(\tilde{x}))\mu+|A|=0 \tag{1-30}$$

点Aの$(\tilde{x},\tilde{c})$が鞍点となるための必要十分条件は、(1-30)の行列式$|A|$が負となることである。この行列式$|A|$を求めると(1-31)になる。

$$|A|=f'(\tilde{x})(\delta-f'(\tilde{x}))-\frac{1}{u_{cc}}(u_c f''(\tilde{x})+u_{xx}) \tag{1-31}$$

(1-3)と資源の再生関数の性質から$1/u_{cc}\times(u_c f''(\tilde{x})+u_{xx})$は正となり、(1-25)から$\delta-f'(x)$は正であるので$f'(\tilde{x})<0$であると、$|A|$は負になる。図1の点$A$の$(\tilde{x},\tilde{c})$では$f'(x)<0$となっているので、$|A|<0$となり鞍点となり、点$A$の$(\tilde{x},\tilde{c})$に到達する最適経路は存在する[7]。

(1-28)を満たすこの定常状態の資源ストック$\tilde{x}$は、図1から効用の割引率δが大きくなると小さくなり、逆にこの割引率が小さくなると、その資源ストック$\tilde{x}$は大きくなる。この割引率がゼロに近づくと、点Aは点Bに近づき、その資源ストックは$\bar{x}$に近づく。このように効用にたいする割引率δは定常状態の資源ストックの大きさを決定することになり、功利主義者の場合この割引率を考慮することにより定常状態の資源ストックは$\bar{x}$より小さくなっている。

点Aの$(\tilde{x},\tilde{c})$が鞍点となるかどうかは、資源ストック$\tilde{x}$の大きさに依存しており$f'(\tilde{x})\leq 0$であると鞍点になる。割引率δが大きくなると$f'(\tilde{x})\leq 0$になるとは限らず、$f'(\tilde{x})>0$の場合には点Aの$(\tilde{x},\tilde{c})$が鞍点になるためには、(1-31)が負となるように次の(1-32)の関係が満たされていなければならない。

$$|f'(\tilde{x})(\delta-f'(\tilde{x})|<\left|\frac{1}{u_{cc}}(u_c f''(\tilde{x})+u_{xx})\right| \tag{1-32}$$

2．資源保護論者の異時点間の厚生の最大化

本節では消費と再生可能資源から得られる効用の評価について、将来の時点の効用を割り引かず、その割引率δをゼロとし、効用の割引因子(discount factor) $e^{-\delta t}$が1である場合を考える。この場合、将来にわたりそれぞれの時点の効用を等しく評価することになり、それぞれの時点の効用とその割引現在価値も等しくなる。前述のようにこのように効用を評価する分析方

法を資源保護論者による分析方法と呼び、無限の時間的視野において、この資源保護論者の再生可能資源の最適な利用の方法とはどのようなものであるかを述べてみる。

本節での効用関数とその性質については、第1節と同じであり、(1-1)、(1-2)および(1-3)であるとする。再生可能資源の再生関数は(1-4)と同じであり、その性質も(1-5)、(1-6)、(1-7)、(1-8)、(1-9)および(1-10)と同じであるものとする。再生可能資源の資源ストックの変化$\dot{x}$についても第1節の(1-11)と同じで、(2-4)で示す。

資源保護論者にとっては、現在から将来までの異時点間にわたる厚生関数は(2-1)になるものとする。

$$W = \int_0^\infty u(c,x)dt \tag{2-1}$$

このとき、資源保護論者にとって時間的視野が無限大であるとき、異時点間の厚生を最大にする課題は(2-3)と(2-4)を制約条件として(2-2)を最大にすることになる。

$$\text{最大化} \quad \int_0^\infty u(c(t),x(t))dt \tag{2-2}$$

$$\text{制約条件} \quad x(0) = x_0 \tag{2-3}$$

$$\dot{x} = f(x) - c \tag{2-4}$$

ここで(2-3)のx_0は初期の資源ストックである。(2-2)の最大値を求めようとしても、割引因子が1であるので(2-2)は有限の値にならない可能性がある。このため第1節と同じようにポントリヤーギンの最大値原理を使うことができない。このような場合に、追い付き基準（a catching-up criterion）を利用してここでの問題を解くことになる。

この追い付き基準による方法は(2-5)によって示すことができる。$(x^*(t),c^*(t))$は(2-1)の積分を最大にする資源ストックと消費の経路であり、$(x(t),c(t))$はその他の実行可能な経路である。

$$\text{Inf} \quad \{\int_0^\infty u(c^*(t),x^*(t))dt - \int_0^\infty u(c(t),x(t))dt\} \geq 0 \tag{2-5}$$

この追い付き基準によれば、最適経路は他の実行可能な経路よりも悪くないという意味で最適になる。(2-2)の効用の積分は無限大となり、この積分が最大となる条件を導くことができないが、(2-5)のように定めると、(2-2)が無限大であっても、実行可能な他の経路の効用の積分の値との差は有限となり、追い付き基準はこの差が正となる条件を見つけようとするものである。

まずハミルトン関数を作ると、(2-6)になる。

$$H = u(c,x) + \lambda(f(x) - c) \tag{2-6}$$

(2-5)を実現する第1番目の必要条件は、(2-6)のハミルトン関数をコントロール変数である消費cによって最大化することであり、ハミルトン関数をcで微分すると(2-7)になる。

$$H_c = u_c - \lambda = 0$$

$$\lambda = u_c \tag{2-7}$$

(2-5)を実現する第2の必要条件は、λの変化とハミルトン関数のxによる偏微分の間で(2-8)

の関係となることである。

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{2-8}$$

(2-8)は(2-9)になる。

$$\dot{\lambda} = -u_x - \lambda f'(x) \tag{2-9}$$

(2-5)を実現する十分条件は(2-10)になる。$\tilde{x}$ は実行可能な他の資源ストックである[8]。

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)(\tilde{x}(t) - x(t)) \geq 0 \tag{2-10}$$

(2-5)を実現する必要条件である(2-7)を時間で微分すると(2-11)になる。

$$\dot{\lambda} = u_{cc}\dot{c} \tag{2-11}$$

(2-7)と(2-11)を(2-9)に代入すると、(2-5)を実現する消費の変化は(2-12)になる。

$$u_{cc}\dot{c} = -u_x - u_c f'(x)$$

$$\dot{c} = \frac{1}{u_{cc}}(-u_x - u_c f'(x)) \tag{2-12}$$

(1-3)より $u_c > 0$ 、$u_x > 0$ および $u_{cc} < 0$ であるので、$f'(x) \geq 0$ のときには、$\dot{c} > 0$ になる。このことから $\dot{c} = 0$ あるいは $\dot{c} < 0$ となるのは $f'(x) < 0$ の場合に限られる。つまり、図 2 において $\dot{c} = 0$ あるいは $\dot{c} < 0$ となるのは(1-9)となる $\hat{x}$ より右の $\hat{x} < x < x^c$ のときに限られる。

(2-12)から $\dot{c} = 0$ となるのは(2-13)のときである。

$$u_x + u_c f'(x) = 0 \tag{2-13}$$

(2-13)を全微分すると(2-14)になる。

$$(u_{xx} + u_c f''(x))dx + u_{cc} f'(x)dc = 0$$

$$\frac{dc}{dx} = -\frac{u_{xx} + u_c f''(x)}{u_{cc} f'(x)} > 0 \tag{2-14}$$

(1-3)より $u_c > 0$ 、$u_{cc} < 0$ および $u_{xx} < 0$ であり、$\dot{c} = 0$ となるのは $\hat{x} < x < x^c$ のときであることから、(1-9)より $f'(x) < 0$ 、(1-10)より $f''(x) < 0$ である。このことから、$\dot{c} = 0$ となるとき(2-14)において $\frac{dc}{dx} > 0$ となる。

図 2 において横軸に x をとり、縦軸に c と $f(x)$ をとる。(2-4)から $\dot{x} = 0$ の曲線を描くことができ、$\dot{x} > 0$ と $\dot{x} < 0$ の領域は図 1 と同じようになる。(2-12)と(2-14)から $\dot{c} = 0$ の曲線を描くことができる。(2-12)から $\dot{c} = 0$ の曲線より左では $\dot{c} > 0$ となり、この曲線より右では $\dot{c} < 0$ となる。このことから $\dot{x}$ と $\dot{c}$ について 4 つの領域に分けることができ、x と c の位相図を描くことができる。この図 2 において $\dot{x} = 0$ と $\dot{c} = 0$ となる曲線の交点 B を $(\overline{x}, \overline{c})$ で示す。この点 B の $(\overline{x}, \overline{c})$ では $\dot{x} = 0$ であるので(2-4)から(2-15)を得る。

$$\overline{c} = f(\overline{x}) \tag{2-15}$$

また点 B では $\dot{c} = 0$ であるので(2-13)から(2-16)の関係を得る。

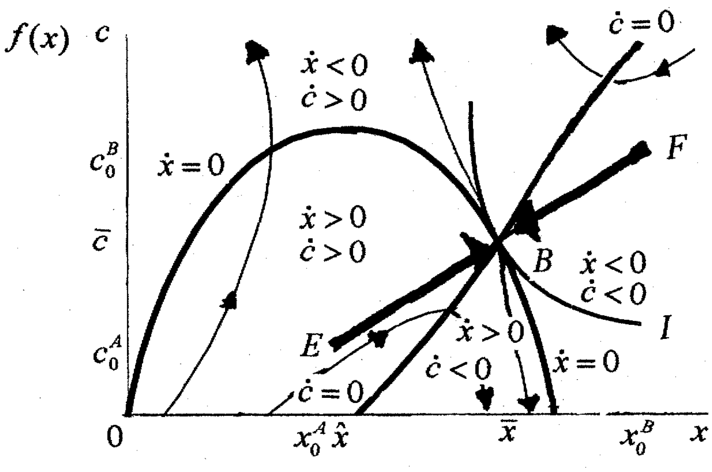

図　2

$$f'(\bar{x}) = -\frac{u_x(\bar{c},\bar{x})}{u_c(\bar{c},\bar{x})} < 0 \tag{2-16}$$

(2-16)は効用の限界代替率が再生関数の接線の傾き $f'(x)$ に等しいことを示している。このことから $\dot{x}=0$ と $\dot{c}=0$ の二つの曲線の交点である点 B では(2-16)となり、この点は $f(x)$ の曲線上にある。

$\dot{x}=0$ と $\dot{c}=0$ の二つの曲線の交点である点 B の $(\bar{x},\bar{c})$ では、定常状態になっており、この定常状態の経路は G.チチルニスキー、G.M.ヒール および A.ベルトラッティ(Beltratti)[3]により、グリーン黄金律経路(the green golden rule path)と呼ばれている。このグリーン黄金律経路では、(2-15)から再生可能資源の再生量が消費に等しく、その資源ストックは一定に維持され、また(2-16)の関係となっている。

このグリーン黄金律経路の持つ性質を明らかにするために、(2-18)を制約条件として効用 $u(c,x)$ を最大にする静学的問題を考えてみる。

最大化　$u(c,x)$　(2-17)

制約条件　$f(x)-c=0$　(2-18)

ここでラグランジェの未定係数法を使うために、(2-19)を定式化する。

$$u^* = u(c,x) + \lambda(f(x)-c) \tag{2-19}$$

この(2-19)の u^* を消費 c と資源ストック x で最大にするために、u^* を消費 c で微分すると(2-20)になり、資源ストック x で微分すると(2-21)になる。

$$u_c^* = u_c - \lambda = 0 \tag{2-20}$$

$$u_x^* = u_x + \lambda f'(x) = 0 \tag{2-21}$$

これらの(2-20)と(2-21)から(2-22)になる。

$$f'(x) = -\frac{u_x}{u_c} \tag{2-22}$$

この(2-22)はグリーン黄金律経路での(2-16)と同じになり、グリーン黄金律経路は資源ストック

と消費が変化しない定常状態において効用が最大になっている経路ということになる[9]。

資源保護論者の時間的視野が無限大であるときに、異時点間の効用である(2.2)を最大にする資源ストックと消費の最適経路を図2で示す。初期の資源ストックが $\bar{x}$ よりも小さく x_0^A のときには、初期の消費を c_0^A に定める。この点 E の (x_0^A, c_0^A) から右上の点 B のグリーン黄金律経路 $(\bar{x}, \bar{c})$ へ行く経路が最適経路になる。逆に初期の資源ストックが $\bar{x}$ よりも大きく x_0^B のときには、初期の資源ストックと消費を点 F の (x_0^B, c_0^B) に定め、左下の点 B のグリーン黄金律経路 $(\bar{x}, \bar{c})$ へ行く経路が最適経路になる。

これらの二つの経路とも点 B のグリーン黄金律経路 $(\bar{x}, \bar{c})$ に到達するためには、この $(\bar{x}, \bar{c})$ では鞍点になっていなくてはならない。このことを確かめるために(2-4)と(2-12)の微分方程式の系を定常状態 $(\bar{x}, \bar{c})$ の近傍で線形近似すれば(2-23)になる。(2-23)の右辺の行列を A とし、その成分をグリーン黄金律経路 $(\bar{x}, \bar{c})$ の数値を使って示している。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(\bar{x}) & -1 \\ -\dfrac{1}{u_{cc}}(u_c f''(\bar{x}) + u_{xx}) & -f'(\bar{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ c - \bar{c} \end{bmatrix} \tag{2-23}$$

(2-23)の行列 A の特性方程式は(2-24)になる。μ は A の固有値である。

$$\mu^2 - (f'(\bar{x}) - f'(\bar{x}))\mu + |A| = 0 \tag{2-24}$$

行列式 $|A|$ を求めると(2-25)になる。

$$|A| = -f'(\bar{x})^2 - \frac{1}{u_{cc}}(u_c f''(\bar{x}) + u_{xx}) < 0 \tag{2-25}$$

$f'(\bar{x}) < 0$、$f''(\bar{x}) < 0$、$u_c > 0$、$u_{cc} < 0$ および $u_{xx} < 0$ であるので $|A| < 0$ となる。$|A| < 0$ であると点 B のグリーン黄金律経路 $(\bar{x}, \bar{c})$ は鞍点となり、この $(\bar{x}, \bar{c})$ への最適経路が存在する[10]。

ここで、図2の点 B のグリーン黄金律経路 $(\bar{x}, \bar{c})$ を第1節での図1の点 A の修正黄金律経路 $(\tilde{x}, \tilde{c})$ と比較してみる。この修正黄金律経路 $(\tilde{x}, \tilde{c})$ では(1-28)が実現されており、この(1-28)をここでは(2-26)で示す。

$$f'(\tilde{x}) - \delta = -\frac{u_x(\tilde{c}, \tilde{x})}{u_c(\tilde{c}, \tilde{x})} \tag{2-26}$$

この修正黄金律経路 $(\tilde{x}, \tilde{c})$ での(2-26)とグリーン黄金律経路 $(\bar{x}, \bar{c})$ での(2-16)から、定常状態の二つの経路の資源ストックを比較すると $\delta > 0$ であることから(2-27)になり、グリーン黄金律経路での資源ストック $\bar{x}$ は修正黄金律経路での資源ストック $\tilde{x}$ よりも大きい。

$$\bar{x} > \tilde{x} \tag{2-27}$$

次にグリーン黄金律経路 $(\bar{x}, \bar{c})$ と修正黄金律経路 $(\tilde{x}, \tilde{c})$ での消費を比較してみる。消費はグリーン黄金律経路では(2-15)により $\bar{c} = f(\bar{x})$ であり、修正黄金律経路では(1-27)により $\tilde{c} = f(\tilde{x})$ となる。$\dot{c} = 0$ であると、(2-16)から $f'(\bar{x}) < 0$ になる。δ はあまり大きくなく、図1のように点 A の修正黄金律経路では $\tilde{x} > \hat{x}$ になり、$f'(\tilde{x}) < 0$ であるとする。このとき資源ストックについては(2-27)から $\bar{x} > \tilde{x}$ であるので消費は(2-28)になる。

$$\bar{c} < \tilde{c} \tag{2-28}$$

(2-28)は、$\bar{x} > \tilde{x} > \hat{x}$ のときグリーン黄金律経路での消費 $\bar{c}$ が修正黄金律経路での消費 $\tilde{c}$ より小さいことを示している。

次に資源保護論者と功利主義者について同じ所与の初期の資源ストック $x(0) = x_0$ において、時間的視野が無限大での異時点間の厚生である(1-14)と(2-2)を最大にする最適経路での初期の消費 c_0 の大きさを、それぞれどのように決定すべきであるかを述べる。そこでこの x_0 は図3のように次の(2-29)になっているものとする。

$$x_0 < \hat{x} < \tilde{x} < \bar{x} \tag{2-29}$$

この(2-29)において、資源保護論者の最適な初期の消費を c_0^* とし、功利主義者の最適な初期の消費を c_0^0 とする。いま、(2-30)の関係になっているものとする。

$$c_0^* > c_0^0 \tag{2-30}$$

このとき(1-3)の効用関数の性質、(2-7)および(1-18)から(2-31)になる。

$$0 < \lambda_0^* < \lambda_0^0 \tag{2-31}$$

$\dot{x} = f(x) - c$ であり、初期の資源ストック x_0 が同じであるので、(2-30)から(2-32)になる。

$$\dot{x}^*(0) < \dot{x}^0(0) \tag{2-32}$$

$\lambda(t)$ の連続性により、きわめて小さな時間 τ について(2-33)になるものとする。

$$\lambda^*(\tau) < \lambda^0(\tau) \tag{2-33}$$

(2-9)は(2-34)になる。

$$\frac{\dot{\lambda}^*}{\lambda^*} = -f'(x^*) - \frac{u_x^*}{\lambda^*} \tag{2-34}$$

(1-20)は(2-35)になる。

$$\frac{\dot{\lambda}^0}{\lambda^0} = \delta - f'(x^0) - \frac{u_x^0}{\lambda^0} \tag{2-35}$$

(2-32)から $x^* < x^0$ になり、再生関数の性質から $-f'(x^*) < -f'(x^0)$ となる。また(2-33)と効用関数の性質から、$-\frac{u_x^*}{\lambda^*} < -\frac{u_x^0}{\lambda^0}$ となる。このことから(2-34)と(2-35)について(2-36)を得る。

$$\frac{\dot{\lambda}^*}{\lambda^*} < \frac{\dot{\lambda}^0}{\lambda^0} \tag{2-36}$$

(2-33)と(2-36)から(2-37)になる。

$$\lambda^*(t) < \lambda^0(t) \tag{2-37}$$

(2-7)、(1-18)および(2-37)から(2-38)になる。

$$c^*(t) > c^0(t) \tag{2-38}$$

$x^*(t) < x^0(t) < \hat{x}$ のときには $f(x^*) < f(x^0)$ となり、$c^*(t) > c^0(t)$ であるので、$\dot{x} = f(x) - c$ から $\dot{x}^*(t) < \dot{x}^0(t)$ となり、さらに $x^*(t) < x^0(t)$ となる。このことから時間が経過しても資源保護論者と功利主義者の二つの最適経路について同じ関係が続く。

だが、$\hat{x} < x^*(t) < x^0(t)$ になると $f(x^*) > f(x^0)$ になり $\dot{x}^*(t) < \dot{x}^0(t)$ となるとは限らず、必ずしも $x^*(t) < x^0(t)$ のままでない。ここで $x^*(t) < x^0(t)$ のままであると、二つの最適経路で同じ関係が続く。$x^*(t) = x^0(t)$ になっても最初の関係に戻るだけであるので同様に $c^*(t) > c^0(t)$ となる。

以上 (2-38)から時間が無限に経過すると(2-39)になる(11)。

$$\bar{c} = \lim_{t\to\infty} c^*(t) > \tilde{c} = \lim_{t\to\infty} c^0(t) \tag{2-39}$$

(2-39)は(2-28)と矛盾するので、初期の最適な消費は(2-40)にならなければならず、資源保護論者の初期の消費は功利主義者の初期の消費より小さいことになる。

$$c_0^* < c_0^0 \tag{2-40}$$

図 1 と図 2 での最適経路を一つの図で示した図 3 においては、(2-29)のような初期の資源ストック x_0 では、資源保護論者にとっては初期の消費を c_0^d に定め、点 d の (x_0, c_0^d) から点 B のグリーン黄金律経路 $(\bar{x}, \bar{c})$ に進む経路が最適経路になる。他方功利主義者にとっては初期の消費を c_0^b に定め、点 b の (x_0, c_0^b) から点 A の修正黄金律経路 $(\tilde{x}, \tilde{c})$ へ進む経路が最適経路になる。

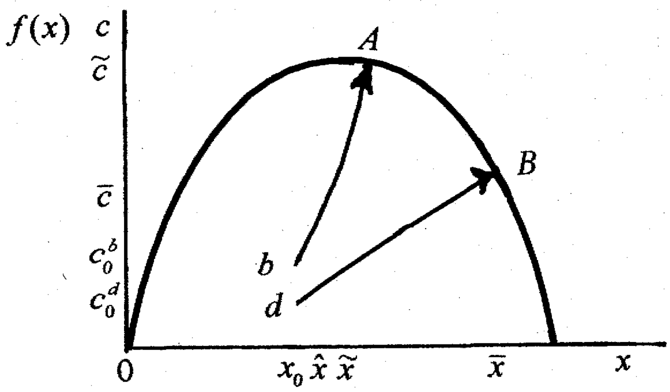

図 3

3．G.チチルニスキーの厚生関数に基づく再生可能資源の最適利用

長期的な時間的視野で厚生の最大化を扱う問題においては、効用に対する割引率あるいは割引因子はきわめて重要になる。第 1 節での功利主義者の立場において、効用を正の割引率あるいはその割引因子で評価する場合には、将来世代の効用を低く評価することから近視眼的になり、将来世代を配慮しない行動がとられることになる。このため、資源の枯渇化や環境破壊などの問題を引き起こす可能性があり、将来世代を犠牲にする。第 2 節での資源保護論者の立場から効用を評価する場合には、割引率がゼロとなり割引因子は常に 1 で等しく、現代世代の効用と将来世代の効用を同じように評価する。だが、現代世代の貯蓄により資本蓄積や技術進歩などが実現される場合に、現代世代を犠牲にして将来世代が恩恵を受け取る可能性がある。

長期的な時間的視野で生産物、資源および環境などの利用の問題を考える場合に、現代世代と将来世代の間での利益が一方の世代に片寄りすぎることなく、二つの世代間で衡平性を確保

することが重要になる。このような世代間衡平の問題を、第1節で述べた従来の功利主義者の分析方法に将来世代への評価も加えるという新しい厚生関数を作成し、解決しようとした経済学者に G.チチルニスキーがいる(12)。この G.チチルニスキーの厚生関数とはどのようなものであるのか、またこの厚生関数に基づく再生可能資源の長期的視野での効率的利用の方法とはどのようなものであるのかを、G.チチルニスキー[4]および G.M.ヒール[6]により述べてみる。

効用関数は(1-1)と同じであり、時点 t の効用関数を(3-1)で示す。この効用関数の性質は(1-3)と同じであるとする。

$$u_t = u(c(t), x(t)) \tag{3-1}$$

効用は有限であり、またこの効用関数については(3-2)であると仮定する。

$$0 \le u(c(t), x(t)) < \infty \tag{3-2}$$

この効用の無限の時点までの点列を(3-3)の U で示す。

$$U = \{u_1, u_2, u_{3,} \cdots, u_t, \cdots\} \tag{3-3}$$

この効用関数の点列 U について、G.チチルニスキーは時点との関係でゼロになるものとそうでないものと区別して次のように定義している。

定義1　K 番目の切り取り(K-th cutoff)

K 番目の切り取り U^K は K 番目までの効用の点列が u_i に等しく、K+1 番目以後の効用の点列がゼロとなるものであり、(3-4)で示すことができる。この K 番目の切り取りからなる点列 U^K を G.チチルニスキーは現在(the present)と呼んでいる。

$$U^K = \{u_1, u_2, u_{3,} \cdots, u_K, 0, 0, \cdots\} \tag{3-4}$$

定義2　K 番目の後部(the K-th tail)

K 番目の後部 U_K は K 番目までの効用の点列がゼロであり、K+1 番目以後の効用の点列が u_i になる点列であり、(3-5) で示すことができる。この K 番目の後部からなる点列 U_K を G.チチルニスキーは将来(the future)と呼んでいる。

$$U_K = \{0, 0, 0, \cdots, u_{K+1}, u_{K+2}, u_{K+3,} \cdots\} \tag{3-5}$$

K 番目の切り取りと K 番目の後部は(3-3)の効用の点列を二つに分割したものであるので、(3-6)の関係を得る。

$$U = U^K + U_K \tag{3-6}$$

次に、効用の点列 U によって得られる厚生関数を $W(U)$ とする。この厚生関数によって、G.チチルニスキーは現在の独裁と将来の独裁を次のように定義している。

定義3　現在の独裁(a dictatorship of the present)

異なる効用の点列 U' と U'' によって得られる二つの厚生関数 $W(U')$ と $W(U'')$ について(3-7)になるものとする。

$$W(U') > W(U'') \tag{3-7}$$

ここで、U' の K 番目の後部 U'_K を $\tilde{U}_K$ に置き換え、U'' の K 番目の後部 U''_K を $\hat{U}_K$ に置き換え

る。現在の独裁は、U' と U'' について K 番目の後部をどのような他の効用の点列の K 番目の後部 $\tilde{U}_K$ と $\hat{U}_K$ に置き換えても、この効用の点列 $(U'^K, \tilde{U}_K)$ と $(U''^K, \hat{U}_K)$ によって作られた厚生関数から得られる厚生の大きさの順序が、(3-7)と同様に(3-8)の関係となることである。

$$W(U'^K, \tilde{U}_K) > W(U''^K, \hat{U}_K) \tag{3-8}$$

つまり、現在の独裁は K+1 番目よりも後の効用の点列をどのように置き換えても、異時点間にわたる厚生の大きさの順序は変わらず、K 番目までの効用の点列によって決定されてしまうことである。

定義 4　将来の独裁(a dictatorship of the future)

効用の点列 U' と U'' によって得られる二つの厚生関数 $W(U')$ と $W(U'')$ について、(3-9)になるものとする。

$$W(U') > W(U'') \tag{3-9}$$

同様に U' の K 番目の切り取り U'^K を $\tilde{U}^K$ に置き換え、U'' の K 番目の切り取り U''^K を $\hat{U}^K$ に置き換える。将来の独裁は、K 番目の切り取りをどのような他の効用の点列の K 番目の切り取り $\tilde{U}^K$ と $\hat{U}^K$ に置き換えても、この効用の点列 $(\tilde{U}^K, U'_K)$ と $(\hat{U}^K, U''_K)$ によって作られた厚生関数から得られる厚生の大きさの順序が(3-9)と変わらず(3-10)になることである。

$$W(\tilde{U}^K, U'_K) > W(\hat{U}^K, U''_K) \tag{3-10}$$

つまり、将来の独裁は K 番目までの効用の点列をどのように置き換えても、異時的間にわたる厚生の大きさの順序は K+1 番目以後の効用の点列によって決定されることである(13)。

異時点間にわたる効用を評価する厚生関数としては、第 1 節での(1-13)の功利主義者の厚生関数が広く経済学者の間で使われてきた。だがこの厚生関数は将来の効用を割り引くことから、遠い将来ほど効用を低く評価することになる。この(1-13)の功利主義者の厚生関数が現在の独裁であることを G.M.ヒール[6]に従い示すと次のようになる。

定義 3 で現在の独裁を定義したときには、時間について離散形の変数を使ったが、ここでは連続形の変数を使う。二つの異なる効用関数をそれぞれ $u^1(c,x)$ と $u^2(c,x)$ とし、これらの二つの効用関数から作った厚生関数を(3-11)と(3-12)で示す。

$$W^1 = \int_0^\infty u^1(c,x)e^{-\delta t}dt \tag{3-11}$$

$$W^2 = \int_0^\infty u^2(c,x)e^{-\delta t}dt \tag{3-12}$$

W^1 と W^2 について $W^1 > W^2$ となり、(3-13)の関係になっているものとする。ただし D は定数で、D>0 であるとする。

$$\int_0^\infty u^1(c,x)e^{-\delta t}dt > \int_0^\infty u^2(c,x)e^{-\delta t}dt + D \tag{3-13}$$

割引因子 $e^{-\delta t}$ の変化率は(3-14)のように $-\delta$ となり、割引因子は低下する。

$$\frac{1}{e^{-\delta t}} \times \frac{d(e^{-\delta t})}{dt} = -\delta < 0 \tag{3-14}$$

また割引因子は時間が経過するにつれてゼロに収束し、(3-15)になる。

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\delta t} \to 0 \tag{3-15}$$

(3-13)の 0 時点から無限大の時点までの積分を、0 時点から K 時点までと K 時点から無限大の時点までの二つに分ける。$u^1(c,x)$ について K 時点以後の効用の経路を変え、K 時点以後効用をできるだけ小さくし、これを $\underline{u}^1(c,x)$ で示す。他方、$u^2(c,x)$ について K 時点以後効用をできるだけ大きくし、これを $\overline{u}^2(c,x)$ で示す。このとき K を大きくすると(3-14)と(3-15)から割引因子はゼロへと減少するので、(3-16)の左辺の $\overline{u}^2(c,x)e^{-\delta t}$ と $\underline{u}^1(c,x)e^{-\delta t}$ もゼロへ減少する。このことから(3-16)を満たす積分での時点 K が存在する。

$$\int_K^{\infty} \overline{u}^2(c,x)e^{-\delta t}dt - \int_K^{\infty} \underline{u}^1(c,x)e^{-\delta t}dt < D \text{、} D \text{は定数である} \tag{3-16}$$

K 時点から後の効用、つまり K 番目の後部がどのようなものであっても、(3-13)となり厚生の大きさの順序が変わらず、現在の独裁が存在することになる(14)。

他方で遠い将来の効用の現在価値が大きい場合には、将来の独裁になる可能性がある。G.チチルニスキー[4]によれば、特に将来の独裁になる場合として、厚生関数が効用の点列 U の $\liminf_{t \to \infty} u_t(c,x)$ あるいは効用の長期的平均になる場合を考えている。ここで、効用の点列の $\liminf_{t \to \infty} u_t(c,x)$ で厚生関数を示すと(3-17)になる。

$$W = \liminf_{t \to \infty} u_t(c,x) \tag{3-17}$$

厚生関数が(3-17)の場合、厚生の大きさが無限の時点の効用の極値にのみ依存するので、明らかに将来の独裁になる(15)。

功利主義者の(1-13)のような従来の厚生関数では現在の独裁になり、将来世代の厚生を軽視することになる。特に資源の枯渇化や環境破壊の問題を考えると、将来世代の厚生も考慮することが重要になる。G.チチルニスキーはこのような問題を考え、現在の独裁でもなく将来の独裁でもない厚生関数を導き出そうとした。さらにこの厚生関数が連続的(continuous)で、独立的(independent)であるという条件を満たすとき、G.チチルニスキーは厚生関数が(3-18)になると考えた(16)。

$$W(U) = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t u_t(c,x) + \Phi(U) \text{、} \lambda_t = e^{-\delta t} \tag{3-18}$$

この G.チチルニスキーの厚生関数は、(1-13)および(2-1)の異時点間にわたる効用の積分の形態ではなく、異時点間にわたる割り引かれた効用の現在価値の合計 $\sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t u_t(c,x)$ と純有限可法的測度(a parely finitely additive measure) $\Phi(U)$ (17)の和になっている(18)。ここで λ_t は割引因子で

あり、$\lambda_t = e^{-\delta t}$ である。この割引因子はすべての t について $\lambda_t > 0$ であり、また $\sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t < 0$ である。G.チチルニスキーは $\Phi(U)$ について具体的には $\liminf_{t \to \infty} u_t(c,x)$ を考えている。(3-18)の G.チチルニスキーの厚生関数では、右辺の第 2 項が存在することにより現在の独裁でなくなり、第 1 項が存在することにより将来の独裁でなくなる。特に右辺の第 2 項の $\Phi(U)$ により、厚生関数が現在の独裁になることを回避していることが重要な特徴となっている(19)。

さらに G.チチルニスキーは(3-18)の厚生関数の右辺の第 1 項に α を掛け、第 2 項に $1-\alpha$ を掛けることにより、(3-19)の厚生関数も導いている。ただし α は定数であり、$0<\alpha<1$ である。この(3-19)では厚生関数は第 1 項と第 2 項の加重和になっている(20)。

$$W(U) = \alpha \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t u_t(c,x) + (1-\alpha)\Phi(U) \tag{3-19}$$

(3-18)および(3-19)の G.チチルニスキーの厚生関数では、異時点間にわたる厚生が最大となる再生可能資源の最適利用の問題を数学で解くことは困難であった。この困難な問題を、G.M.ヒールは数学的な工夫を行うことにより、解こうとした。G.M.ヒールが[6]において試みている数学的方法をここで述べてみる。まず、(3-19)の厚生関数を下の(3-20)に書き換える。

$$W = \alpha \int_0^{\infty} u(c,x)\Delta(t)dt + (1-\alpha)\lim_{t \to \infty} u(c(t),x(t))、\quad \Delta(t) = e^{-\delta(t)} \tag{3-20}$$

(3-20)の右辺の第 1 項は効用の現在価値の合計ではなくその積分となっている。$\Delta(t)$ は割引因子であり $\Delta(t) = e^{-\delta(t)}$ で示す。また割引因子は $\int_0^{\infty} \Delta(t) < \infty$ になるものとする。割引因子での $\delta(t)$ は時間についての変数になっている。(3-20)の右辺の第 2 項の $\lim_{t \to \infty} u(c(t),x(t))$ は G.チチルニスキーによる(3-18)では $\liminf_{t \to \infty} u_t(c,x)$ であったが、ここではグリーン黄金律経路 $(\bar{c},\bar{x})$ での効用 $u(\bar{c},\bar{x})$ になっている。

G.M.ヒールは再生可能資源の利用による異時点間にわたる厚生の最大化の問題を、(3-22)と(3-23)を制約条件として(3-21)の異時点間の厚生を最大にする問題として考えている。

$$\text{最大化}\quad \alpha \int_0^{\infty} u(c,x)\Delta(t)dt + (1-\alpha)\lim_{t \to \infty} u(u,x) \tag{3-21}$$

$$\text{制約条件}\quad \dot{x} = f(x) - c \tag{3-22}$$

$$x(0) = x_0 \tag{3-23}$$

ここで α は定数である。この α と $1-\alpha$ の値によって、現代世代を重要視しているのか、それとも将来世代を重要視しているのかが大きく左右されることになる。α の値が大きいと現在世代を重要視していることになり、$1-\alpha$ の値が大きいと将来世代を重要視していることになる。

効用関数 $u(c,x)$ と(3-22)の資源の再生関数 $f(x)$ の性質は第 1 節と第 2 節においてと同じであると仮定する。(3-21)の割引因子 $\Delta(t)$ について、G.M.ヒールは次の(3-24)と(3-25)を仮定する。

$$q(t) = -\frac{\dot{\Delta}(t)}{\Delta(t)} \tag{3-24}$$

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = 0 \tag{3-25}$$

割引因子 $\Delta(t)$ は $e^{-\delta(t)t}$ であるので、(3-24)は(3-26)になる。

$$q(t) = \delta'(t)t + \delta(t) \tag{3-26}$$

$q(t)$ が(3-25)を満たすためには、割引率 $\delta(t)$ は次の(3-27)と(3-28)になる必要がある。

$$\lim_{t\to\infty} \delta'(t) = 0 \tag{3-27}$$

$$\lim_{t\to\infty} \delta(t) = 0 \tag{3-28}$$

有限の時点で $e^{-\delta(t)t} > 0$ と $\delta(t) > 0$ であるとし、また $\delta(t)$ の変化は連続的であるとすると、(3-28)になるということは有限の時点では $\delta'(t) < 0$ ということになる。従来の功利主義者のモデルでは割引率 δ は一定とみなしているが、ここでは割引率 $\delta(t)$ は時間の経過とともに低下するとみなしており、異時点間の厚生の最大化の問題を考えるにおいて重要な相違点になっている。

(3-21)の厚生の最大値を求めるにおいて、α が定数であり、第 2 項の $\lim_{t\to\infty} u(c,x)$ がグリーン黄金律経路 $(\bar{x},\bar{c})$ の効用であるので、第 2 項は一定の値になる。このため(3-21)の第 1 項のみに注目して、G.M.ヒールは(3-22)と(3-23)を制約条件として(3-29)の厚生を最大にする問題を解いている。

$$W = \int_0^\infty u(c,s)\Delta(t)dt \tag{3-29}$$

この問題を解くためにハミルトン関数を作ると、(3-30)になる。

$$H = u(c,x) + \lambda(f(x) - c) \tag{3-30}$$

(3-29)が最大となる第 1 の必要条件は、まずコントロール変数である消費 c によって、ハミルトン関数を最大にすることにより得られ、(3-31)になる。

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u_c - \lambda = 0$$

$$\lambda = u_c \tag{3-31}$$

(3-29)が最大となる第 2 の必要条件は、資源ストックのシャドープライスの現在価値の変化とハミルトン関数の現在価値の x による偏微分との間で、(3-32)となることである。

$$\frac{d(\lambda\Delta(t))}{dt} = -\frac{\partial(H\Delta(t))}{\partial x} \tag{3-32}$$

(3-32)を解き、(3-24)を代入するとこの第 2 の必要条件は(3-33)になる。

$$\dot{\lambda}\Delta(t) + \lambda\dot{\Delta}(t) = -(u_x + \lambda f'(x))\Delta(t)$$

$$\dot{\lambda} - \lambda q(t) = -u_x - \lambda f'(x) \tag{3-33}$$

(3-25)により $q(t)$ は時間が無限大になるとゼロになるので、(3-33)は(3-34)になる。

$$\dot{\lambda} = -u_x - \lambda f'(x) \tag{3-34}$$

定常状態では$\dot{\lambda}=0$であり、この(3-34)に第1番目の必要条件である(3-31)を代入すると(3-35)になる。

$$f'(x)=-\frac{u_x}{u_c} \tag{3-35}$$

この(3-35)は第2節の(2-16)と同じになっており、(3-21)の第1項を最大にする最適経路は時間が無限に経過した定常状態ではグリーン黄金律経路$(\bar{x},\bar{c})$にある。また(3-21)の第2項もグリーン黄金律経路にある。このようにして、G.M.ヒールは G.チチルニスキーの厚生関数による異時点間の厚生を最大にする問題を、割引因子の負の変化率$q(t)$を無限の時点でゼロにすることにより、つまり割引率$\delta(t)$をゼロに低下させることにより、最適経路をグリーン黄金律経路$(\bar{x},\bar{c})$に収束させるという方法で解いている(21)。

なお、ここでの G.M.ヒールの数学による解き方、また将来世代の厚生の考慮には次の二つの問題点が残る。まず第1に(3-21)において割引因子$\Delta(t)$が時間tを陽表的に含んであり、この場合微分方程式は非自励系になり、時間を陽表的に含んでいない自励系と同じようには解けないことである(22)。第2に(3-21)を最大化するにおいて、定数αの大きさにより最適経路が異なることになるが、このαが考慮されていない。第3に将来世代の厚生を考慮するためには、無限の将来の時点のグリーン黄金律経路の効用だけでは不十分ではないか、ということである。

4. C.リーおよびK.G.ロフグレンによる再生可能資源の最適利用

C.リーとK.G.ロフグレンは再生可能資源の最適利用の問題をG.チチルニスキーとG.M.ヒールの議論を踏まえて、新たに解決しようとした。この C.リーと K.G.ロフグレンの解決の方法の特徴とはどのようなものであるかを、C.リーと K.G.ロフグレン[10]および[11]に従い、以下で述べることにする。

前節では、G.チチルニスキーと G.M.ヒールの厚生関数を示した。G.チチルニスキーは従来の功利主義者の立場も考慮しつつ、無限の将来の時点の効用である$\liminf_{t\to\infty} u(c,x)$を厚生関数に加え、将来世代の効用も考慮した(3-18)のような厚生関数を作成した。また、G.M.ヒールは無限の将来の時点のグリーン黄金律経路での効用を加えて、厚生関数を作成した。だが、この無限の将来の極限の効用を厚生関数の中に組み入れるだけでは、将来世代の厚生を考慮するには不十分ではないかと考えられる。このことから、C.リーとK.G.ロフグレンは、功利主義者の厚生と、第2節で述べたようなゼロ時点から無限の将来の時点までの、割引因子が1となり割引率がゼロである効用の積分である資源保護論者の厚生との加重和により、(4-1)のような厚生関数を作成した(23)。

$$W=\alpha\int_0^\infty u(c,x)\,e^{-\delta t}dt+(1-\alpha)\lim_{\theta\to 0}\int_0^\infty u(c,x)\,e^{-\theta t}dt \tag{4-1}$$

効用関数$u(c,x)$については第1節、第2節および第3節と同じ性質を仮定する。(4-1)の右辺

の第1項の積分は第1節の(1-13)と同じものであり、第2項の積分 $\lim_{\theta\to 0}\int_0^\infty u(c,x)e^{-\theta t}dt$ は将来の効用を割り引かないということで、第2節の(2-1)と同じものになっている。(4-1)の厚生関数はこれら二つの積分の加重和となっている。第1項だけであると、時間の経過とともに効用の割引現在価値はゼロに近づき、将来世代の効用が考慮されなくなる。この第2項を加えることにより、C.リーとK.G.ロフグレンは将来世代の効用を厚生関数の中に組み入れ、再生可能資源の利用の世代間衡平を確保しようとしている。

将来の効用を割り引かない場合、現在の効用と将来の効用を同じように評価しているので、将来の独裁となるような形で将来の効用を必ずしも重要視していない。だが、たとえば現代世代が貯蓄し、その貯蓄によって投資を行い、技術進歩を実現しようとする場合には、現代世代の犠牲の下で、将来世代が技術進歩という成果を享受することになる。このような場合効用の割引率がゼロであっても、将来世代が重要視されているとみなすことができる。このことから(4-1)の右辺の第1項は現在の独裁を示し、第2項は将来の独裁を示しているとも解釈できる。

また、G.M.ヒールは (3-20)の厚生関数の場合において数学的工夫を行うことにより、異時点間の再生可能資源の最適利用の問題を解いた。だが、この G.M.ヒールの方法は数学的には不完全であり、C.リーと K.G.ロフグレンはこの最適化の問題を数学的により完全な形で解こうとした。

C.リーと K.G.ロフグレンの分析方法には厚生関数と数学的方法に関して以上二つの特徴があり、この分析方法を使い、異時点間の再生可能資源の最適利用はどのように行われるべきであるかを述べる。まず簡単化のために(4-1)の厚生関数の第2項の $1-\alpha$ を β に置き換え、厚生関数を(4-2)で定式化する。

$$W=\alpha\int_0^\infty u(c,x)e^{-\delta t}dt+\beta\lim_{\theta\to 0}\int_0^\infty u(c,x)e^{-\theta t}dt \tag{4-2}$$

ここで $\alpha+\beta=1$ になる。(4-2)において α と β は定数であるが、この α と β の値によって、現代世代を重要視しているのか、それとも将来世代を重要視しているかが大きく左右されることになる。α の値が大きいと現在世代を重要視していることになり、β の値が大きいと将来世代を重要視していることになる。極端な場合として、$\alpha=1$ であれば第1節での功利主義者の分析になり、$\beta=1$ であれば第2節での資源保護論者の分析になる。

ここで、(4-4)と(4-5)を制約条件として、(4-3)のゼロ時点から将来の無限の時点までの厚生を最大にする問題を解いてみる。(4-4)と(4-5)はこれまでと同じ制約条件である。

最大化　$$\alpha\int_0^\infty u(c,x)e^{-\delta t}dt+\beta\lim_{\theta\to 0}\int_0^\infty u(c,x)e^{-\theta t}dt \tag{4-3}$$

制約条件　$$\dot{x}=f(x)-c \tag{4-4}$$

$$x(0)=x_0 \tag{4-5}$$

(4-3)の二つの積分を一つにすると厚生関数は(4-6)になる。

$$W = \int_0^{\infty} u(c,x)(\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t})dt \quad (4\text{-}6)$$

(4-6)の $\alpha e^{-\delta t}+\beta e^{-\theta t}$ を(4-7)のように置き換える。

$$a(t) = -\{\log(\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t})\}/t \quad (4\text{-}7)$$

さらに、この(4-7)を(4-8)の $p(t)$ で示す。$p(t) = \alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t}$ である。

$$p(t) = e^{-a(t)t} \quad (4\text{-}8)$$

この(4-8)を使うことによって、(4-6)の厚生関数を(4-9)で示す。

$$W = \int_0^{\infty} u(c,x)\, e^{-a(t)t} dt \quad (4\text{-}9)$$

この $e^{-a(t)t}$ は効用 $u(c,x)$ に対する割引因子のような形になっており、また $a(t)$ は割引率のような形になっている。

この $a(t)$ の性質をまず初期値である $a(0)$ について述べる[24]。(4-7)から(4-10)になる。

$$\lim_{t\to 0} a(t) = \lim_{t\to 0} \frac{-\log(\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t})}{t} \quad (4\text{-}10)$$

ロピタル(I'Hospital)の定理[25]により、(4-10)の右辺の分母と分子を時間で微分すると(4-11)になる。

$$\lim_{t\to 0} a(t) = \frac{\lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}\{-\log(\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t})\}}{\lim_{t\to 0} \frac{dt}{dt}}$$

$$\lim_{t\to 0} a(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\delta e^{-\delta t} + \beta\theta e^{-\theta t}}{\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t}}$$

$$\lim_{t\to 0} a(t) = \frac{\alpha\delta + \beta\theta}{\alpha + \beta} \quad (4\text{-}11)$$

$\alpha + \beta = 1$ であるので、(4-11)は(4-12)になる。

$$\lim_{t\to 0} a(t) = \alpha\delta + \beta\theta \quad (4\text{-}12)$$

$\theta \to 0$ であるので、(4-12)は(4-13)となり、$a(0)$ は $\alpha\delta$ になる。

$$a(0) = \alpha\delta > 0 \text{、} \alpha > 0 \text{ のとき} \quad (4\text{-}13)$$

時間が無限大となる $a(t)$ の値も、ロピタルの定理を使うと求めることができ、(4-14)を得る。

$$\lim_{t\to \infty} a(t) = \lim_{t\to \infty} \frac{\alpha\delta e^{-\delta t} + \beta\theta e^{-\theta t}}{\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t}} \quad (4\text{-}14)$$

(4-14)は(4-15)になる。

$$\lim_{t\to \infty} a(t) = \lim_{t\to \infty} \frac{e^{-\theta t}(\alpha\delta e^{-(\delta-\theta)t} + \beta\theta)}{e^{-\theta t}(\alpha e^{-(\delta-\theta)t} + \beta)} \quad (4\text{-}15)$$

$\delta > 0$ と $\theta \to 0$ より、$\delta - \theta > 0$ となる。$\delta - \theta > 0$ であると、$\lim_{t\to\infty} e^{-(\delta-\theta)t} \to 0$ となるので、(4-15)は(4-16)になる。

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \theta \tag{4-16}$$

$\theta \to 0$ であるので、$a(t)$ は時間が無限大になると(4-17)のように、ゼロとなる。

$$\lim_{t\to\infty} a(t) \to 0 \tag{4-17}$$

次に (4-7)の $a(t)$ を時間で微分し $a'(t)$ を求めると、(4-18)になる。

$$a'(t) = \frac{1}{t^2}\{-\frac{\alpha(-\delta)e^{-\delta t} + \beta(-\theta)e^{-\theta t}}{\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t}}t + \log(\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t})\} \tag{4-18}$$

計算を簡単にするために、(4-18)の右辺の{　}の中を $G(t)$ に置き換える。

$$G(t) = -\frac{\alpha(-\delta)e^{-\delta t} + \beta(-\theta)e^{-\theta t}}{\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t}}t + \log(\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t})$$

この $G(t)$ を使うと、(4-18)は(4-19)になる。

$$a'(t) = \frac{1}{t^2}G(t) \tag{4-19}$$

ここで $G(t)$ により、$a'(t)$ を明らかにする。まず $G(0)$は次のようになる。

$$G(0) = \frac{\alpha\delta + \beta\theta}{\alpha + \beta} \times 0 + \log(\alpha + \beta)$$

$\alpha + \beta = 1$ であるので G(0)は(4-20)となり、ゼロとなる。

$$G(0) = 0 \tag{4-20}$$

$G'(t)$ を求めると(4-21)になる。

$$G'(t) = \frac{(-\alpha\delta^2 e^{-\delta t} - \beta\theta^2 e^{-\theta t})(\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t})t - (\alpha\delta e^{-\delta t} + \beta\theta e^{-\theta t})(-\delta\alpha e^{-\delta t} - \theta\beta e^{-\theta t})t}{(\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t})^2}$$

$$+\frac{\alpha\delta e^{-\delta t} + \beta\theta e^{-\theta t}}{\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t}} + \frac{-\alpha\delta e^{-\delta t} - \beta\theta e^{-\theta t}}{\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t}}$$

$$G'(t) = -t\frac{\alpha\beta e^{-\delta t}e^{-\theta t}}{(\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t})^2}(\delta - \theta)^2 \tag{4-21}$$

$t > 0$ のとき、$e^{-\delta t} > 0$ および $e^{-\theta t} > 0$ であるので、$G'(t)$ は負になる。

$$G'(t) < 0 \tag{4-22}$$

(4-20)から $G(0) = 0$ であり、(4-22)から $G'(t) < 0$ であるので、$t > 0$ のとき $G(t)$ は(4-23)になる。

$$G(t) < 0\,,\, t > 0 \text{ のとき} \tag{4-23}$$

(4-19)と(4-23)から、$t > 0$ のとき、$a'(t)$ は(4-24)になる。

$$a'(t) < 0\,,\;\; t > 0 \text{ のとき} \tag{4-24}$$

このことから $a(t)$ は初期では(4-13)から $\alpha\delta$ となり、$\alpha > 0$ のとき正になる[26]。(4-24)から $a'(t) < 0$ であるので、$a(t)$ は時間の経過とともに低下し、時間が無限大になると(4-17)からゼロになる。(4-9)の厚生関数では $e^{-a(t)t}$ は効用に対する割引因子の役割を、$a(t)$ は効用に対する割引率の役割をそれぞれ果たしており、時間の経過とともにこの $a(t)$ が低下しゼロになる。G.M.ヒールが第 3 節の(3-21)を解くときに使ったように、また M.L.ワイツマン(Weitzman)が資源問

題と環境問題を解決するさいに[13]と[14]において主張しているように、ここでも割引率を低下させる形になっている。

また、α は定数で厚生関数(4-2)において第1項の功利主義者の効用に対するウエイトになっている。第3節でG.M.ヒールが(3-20)の厚生を最大化するさいに、この α の値は関係せず、数学的には不完全であった。だがここでは(4-7)において示されているように $a(t)$ に α と β が含まれ、(4-3)の厚生の最大化に関係している。

なお、(4-4)と(4-5)を制約条件として、(4-2)の厚生関数による(4-3)の厚生を最大にする問題を考えるとき、(4-2)の厚生関数は(4-9)の厚生関数となり、この厚生関数では、時間が経過するにつれて $a(t)$ はゼロに近づくので、$e^{-a(t)t}$ は1に近づく。このため(4-3)の異時点間の厚生は時間が経過しても一定の値に収束せず、その最大値を求めることができない。厚生を最大にするためには、ここでも第2節と同様に追い付き基準(a catching-up critenon)を使わなければならない。

この追い付き基準を使うと、(4-26)と(4-27)を制約条件として(4-25)の問題を解くことになる。

$$\liminf_{T\to\infty}\left\{\int_0^T u(c^*(t),x^*(t))\,e^{-a(t)t}dt-\int_0^T u(c(t),x(t))\,e^{-a(t)t}dt\right\}\geq 0 \tag{4-25}$$

制約条件 $\dot{x}=f(x)-c$ (4-26)

$$x(0)=x_0 \tag{4-27}$$

$(x^*(t),c^*(t))$ は追い付き基準による実行可能な最適経路であり、$(x(t),c(t))$ は他の実行可能な経路である。この追い付き基準によれば、最適経路 $(x^*(t),c^*(t))$ ではどのような他の実行可能な経路よりも厚生が小さくないことで最適であることを意味している(27)。

まず、ハミルトン関数を定式化すると(4-28)になる。

$$H=u(c,x)+\lambda(f(x)-c) \tag{4-28}$$

追い付き基準により異時点間の厚生が最大となる第1の必要条件を求めると、まずハミルトン関数をコントロール変数である消費 c によって最大にすることであり、これは(4-29)になる。

$$\lambda=u_c \tag{4-29}$$

第2の必要条件は資源ストックのシャドープライス λ とハミルトン関数の間で(4-30)の関係になることである。

$$\frac{d(\lambda e^{-a(t)t})}{dt}=-\frac{\partial(He^{-a(t)t})}{\partial x} \tag{4-30}$$

(4-30)を解くと(4-31)になる。

$$\dot{\lambda}e^{-a(t)}+\lambda\frac{d(-a(t)t)}{dt}e^{-a(t)t}=-u_x e^{-a(t)t}-\lambda f'(x)e^{-a(t)t}$$

$$\dot{\lambda}-\lambda\frac{d(a(t)t)}{dt}=-u_x-\lambda f'(x) \tag{4-31}$$

ここで、$h(t)=d(a(t)t)/dt$ とすると、(4-31)は(4-32)になる。

$$\dot{\lambda} = \lambda(h(t) - f'(x)) - u_x \tag{4-32}$$

第 3 の必要条件は(4-33)であり、横断条件になっている。$x(t)$ は最適な資源ストックであり、$\tilde{x}(t)$ は実行可能な他の資源ストックである。

$$\liminf_{t \to 0} \lambda(t)(\tilde{x}(t) - x(t)) \geq 0 \tag{4-33}$$

このC.リーとK.G.ロフグレンのモデルでは、(4-29)から最適な消費を $c = (x, \lambda)$ で示すことができ、この式を(4-26)と(4-32)に代入すると、(4-34)と(4-35)を得る。

$$\dot{x} = f(x) - c(x, \lambda) \tag{4-34}$$

$$\dot{\lambda} = \lambda(h(t) - f'(x)) - u_x \tag{4-35}$$

(4-35)では $h(t)$ が時間を陽表的に含むので、(4-34)と(4-35)の微分方程式の系は非自励系になっており、解 $(x(t), \lambda(t))$ を簡単には得ることができない。

この解 $(x(t), \lambda(t))$ を得るために、(4-34)は同じままで、(4-35)は $h(t) = 0$ となる自励系の微分方程式の系を(4-36)と(4-37)で示す。

$$\dot{x} = f(x) - c(x, \lambda) \tag{4-36}$$

$$\dot{\lambda} = -\lambda f'(x) - u_x \tag{4-37}$$

この(4-36)と(4-37)の微分方程式の系は第 2 節の(2-4)、(2-7)および(2-9)から得られる微分方程式の系と同じものになっている。第 2 節でのこの系から得られ(2-4)と(2-12)の系は、時間の経過とともに(4-38)と(4-39)を満たす定常状態となるグリーン黄金律経路 $(\overline{x}, \overline{c})$ に収束することを示した。

$$\overline{c} = f(\overline{x}) \tag{4-38}$$

$$f'(\overline{x}) = -\frac{u_x}{u_c} \tag{4-39}$$

以後、(4-34)と(4-35)の微分方程式の系を解くために、まず(4-35)の $h(t)$ が時間の経過とともに $\lim_{t \to \infty} h(t) \to 0$ となるとき、(4-34)と(4-35)の非自励系の微分方程式の系の解 $(x(t), \lambda(t))$ が(4-36)と(4-37)の自励系の微分方程式の系の解 $(x^*(t), \lambda^*(t))$ に収束することを示す。さらに、この自励系の解の定常状態を (x^*, λ^*) とすると、自励系の解 $(x^*(t), \lambda^*(t))$ は時間の経過とともに定常状態である (x^*, λ^*) に収束する。もしこの非自励系の解 $(x(t), \lambda(t))$ が自励系の解 $(x^*(t), \lambda^*(t))$ に収束するなら、非自励系の解 $(x(t), \lambda(t))$ も (x^*, λ^*) に収束することになる。このようにして、非自励系の解 $(x(t), \lambda(t))$ を求めることができることを示す[28]。

そこでまず $h(t)$ の性質を調べる。$h(t)$ は $d(a(t)t)/dt$ であるので、(4-7)から $a(t)t$ を時間で微分すると、(4-40)になる。

$$h(t) = -\frac{\alpha(-\delta)e^{-\delta t} + \beta(-\theta)e^{-\theta t}}{\alpha e^{-\delta t} + \beta e^{-\theta t}}$$

$$h(t) = \frac{e^{-\theta t}\{\alpha\delta e^{-(\delta-\theta)t} + \beta\theta\}}{e^{-\theta t}\{\alpha e^{-(\delta-\theta)t} + \beta\}} \tag{4-40}$$

$\theta \to 0$ であると(4-40)は(4-41)になり、α、β および δ は正であるので、$h(t)$ は正になる。

$$h(t) = \frac{\alpha\delta}{\alpha + \beta e^{\delta t}} > 0 \tag{4-41}$$

(4-41)の $h(t)$ を時間 t で微分すると(4-42)になり、その値は負になる。

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{\alpha\beta\delta^2 e^{\delta t}}{(\alpha + \beta e^{\delta t})^2} < 0 \tag{4-42}$$

(4-41)から $h(0)$ は(4-43)のように正となる。

$$h(0) = \frac{\alpha\delta}{\alpha + \beta} = \alpha\delta > 0 \tag{4-43}$$

次に $t \to \infty$ での $h(t)$ の値を求めるために、$h(t)$ を $\Re$ で示す。

$$\Re = (h(t))^{1/t} \tag{4-44}$$

この $\Re$ を使うと、(4-41)の $h(t)$ は(4-45)になる。

$$\log \Re = \frac{1}{t} \log \frac{\alpha\delta}{\alpha + \beta e^{\delta t}}$$

$$\log \Re = \frac{1}{t}\{\log \alpha\delta - \log(\alpha + \beta e^{\delta t})\} \tag{4-45}$$

ロピタルの定理を使うと、(4-45)から(4-46)を得る。

$$\lim_{t\to\infty} \log \Re = \frac{\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\{\log \alpha\delta - \log(\alpha + \beta e^{\delta t})\}}{\lim_{t\to\infty} \frac{dt}{dt}}$$

$$\lim_{t\to\infty} \log \Re = -\lim_{t\to\infty} \frac{\beta\delta e^{\delta t}}{\alpha + \beta e^{\delta t}}$$

$$\lim_{t\to\infty} \log \Re = -\delta \tag{4-46}$$

(4-46)から(4-47)を得る。

$$\lim_{t\to\infty} \Re = e^{-\delta} \tag{4-47}$$

(4-44)と(4-47)から(4-48)となる。

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = e^{-\delta t} \tag{4-48}$$

$\delta > 0$ であることから $h(t)$ は時間が無限大になるとゼロになる。

$$\lim_{t\to\infty} h(t) \to 0 \tag{4-49}$$

(4-48)の $h(t)$の時間についての変化率は負となる。

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = -\delta < 0 \quad 、\delta > 0 \tag{4-50}$$

次に、(4-34)と(4-35)の非自励系の解を $z(t) = (x(t), \lambda(t))$ とし、(4-36)と(4-37)の自励系の解を $z^*(t) = (x^*(t), \lambda^*(t))$ とし、$h(t)$について(4-43)、(4-49)および(4-50)になるとき、(4-51)が成立する証明をC.リーとK.G.ロフグレン[11]に従い述べる。この証明は数学としてはM.ベナイムとM.W.ハーシュ(Benaïm M. and M. W. Hirsch) [1]に基づいている。

$$\lim_{t\to\infty}\left|z(t)-z^{*}(t)\right|^{1/t}\le e^{-\delta} \tag{4-51}$$

まず、分析を簡単にするために、(4-36)と(4-37)の自励系の解を $\Phi_t=\Phi_t(x,\lambda)$ で示す。ここでは $\Phi_0(x_0,\lambda_0)=(x_0,\lambda_0)$、$\Phi_t(x_0,\lambda_0)=(x^{*}(t),\lambda^{*}(t))$ および $\Phi_{t+s}(x_0,\lambda_0)=\Phi_s(x^{*}(t),\lambda^{*}(t))$ であるとする。また、漸近的誤差率(the asymptotic error rate) $e(z(t))$ を(4-52)で定義する。

$$e(z(t))=\sup_{\tau>0}\lim_{t\to\infty}\left|z(t+\tau)-\Phi_{\tau}(z(t))\right|^{1/t} \tag{4-52}$$

コンパクト不変集合(a compact invariant set)K をある $s\ge 0$ に対する $\{z^{*}(t)\}\mid t\ge s\}$ の閉包と定義する。このコンパクト不変集合の極限では(4-36)と(4-37)の自励系の解は $z^{*}=(x^{*},\lambda^{*})$ となり、定常状態になっているものとする。これはグリーン黄金律経路 $(\overline{x},\overline{c})$ に対応する。

ここで、N を K のコンパクト近傍(a compact neighborhood)であるとし、そして十分に大きな t_0 である $t\ge t_0$ について $z(t)\in N$ であると仮定する[29]。(4-34)と(4-35)の非自励系の方程式を(4-53)で示し、(4-36)と(4-37)の自励系の方程式を(4-54)で示す。

$$\dot{z}=f(t,z) \tag{4-53}$$

$$\dot{z}^{*}=g(z^{*}) \tag{4-54}$$

このとき、(4-55)を得る。

$$\left|z(t+\tau)-\Phi_{\tau}(z(t))\right|\le e^{L\tau}\int_{t}^{t+\tau}\left|f(s,z(s))-g(z^{*}(s))\right|ds \tag{4-55}$$

グロンウォール不等式(the Gronwall's inequality)を使うことによって、(4-56)の不等式を得る。

$$\left|z(t+\tau)-\Phi_{\tau}(z(t))\right|\le e^{L\tau}\int_{t}^{t+\tau}h(s)ds \tag{4-56}$$

ここで、L は $z\in N$ においてのリプシッツ定数(a Lipschitz constant)である[30]。$h(s)$ は(4-49)と(4-50)から時間の経過とともに減少するので、(4-56)は(4-57)になる。

$$\left|z(t+\tau)-\Phi_{\tau}(z(t))\right|\le e^{L\tau}\tau h(t) \tag{4-57}$$

有限値の L と τ について、$\lim_{t\to\infty}(e^{L\tau}\tau)^{1/t}=1$ であるので(4-58)を得る。

$$e(z(t))=\sup_{\tau>0}\lim_{t\to\infty}\left|z(t+\tau)-\Phi_{\tau}(z(t))\right|^{1/t}\le\lim_{t\to\infty}h(t)^{1/t} \tag{4-58}$$

(4-48)から(4-58)は(4-59)になる。このことは $\lim_{t\to\infty}d(z(t),K)=0$ と関係している。

$$e(z(t))\le\exp(-\delta) \tag{4-59}$$

次に、ε を拡張率(the expanshin rate)であるとし、$\lim_{t\to\infty}d(\Phi_t,K)=0$ を満たす Φ_t について、この ε を(4-60)で定義できる。

$$\varepsilon=\sup_{t>0}\left[\min_{\overline{z}(t)\in K}\left\|D\Phi_t^{-1}(\overline{z}(t))\right\|^{-1/t}\right] \tag{4-60}$$

$\| \ \|$は行列のユークリッドノルムである。$\bar{z}(t)=(z^*(t)-z^*)\in K$とする。$z^*$は$z^*=(x^*,\lambda^*)$となり、極限での自励系の解であり、定常状態になっているものとする。

定常状態z^*の近傍で線形近似することにより、$\bar{z}(t)$を$\Phi_t(\bar{z}(0))=\exp(At)\bar{z}(0)$と示すことができる。$A$は(2-23)での定常状態での数値による自励系のヤコビ行列(Jacobian matrix)である。$\Phi_t(\bar{z}(0))=y\in K$とすると、この逆関数は(4-61)になる。

$$\Phi_t^{-1}(y)=\exp(-At)y \tag{4-61}$$

この逆関数を微分すると(4-62)になる。

$$D\Phi_t^{-1}(y)=\exp(-At) \tag{4-62}$$

このとき行列Aとその特性根(characteristic root)について(4-63)になる。第2節ではここでの自励系の解が定常状態では鞍点になっていることを示した。このことから$\mu>0$と$\mu<0$であるので、$\varepsilon>1$になる。

$$\varepsilon=\|\exp A\|\geq\max\exp(\pm\mu)>1 \tag{4-63}$$

(4-63)より$\varepsilon>1$となり、$\min(1,\varepsilon)=1$であることから、$\delta>0$について(4-64)を得る。

$$\exp(-\delta)<\min(1,\varepsilon) \tag{4-64}$$

この(4-64)と(4-59)から(4-65)を得る。

$$e(z(t))\leq\exp(-\delta)<\min(1,\varepsilon) \tag{4-65}$$

(4-65)はM.ベナイムと M.W.ハーシュ [1]によれば(4-34)と(4-35)の非自励系の解が無限大の時点で(4-36)と(4-37)の自励系の解に収束する(4-51)の十分条件になっている。つまり(4-51)は(4-66)となり時間の経過とともに(4-68)の右辺はゼロに近づくことになる(31)。

$$\lim_{t\to\infty}\left|z^*(t)-z^0(t)\right|\leq\lim_{t\to\infty}e^{-\delta t}\text{、}\ \delta>0 \tag{4-66}$$

また、無限大の時点では(4-36)と(4-37)自励系の解は定常状態であるグリーン黄金律経路$(\bar{x},\bar{c})$に収束することから、(4-34)と(4-35)の非自励系の解もグリーン黄金律経路$(\bar{x},\bar{c})$に収束することになる。

次に、初期の資源ストックを同じx_0としたとき異時点間の厚生を最大にする最適経路での、功利主義者の初期の消費x_0^0、C.リーとK.G.ロフグレンの初期の消費x_0および資源保護論者の初期の消費x_0^*の間にはどのような関係があるかをみる。

そこで、C.リーとK.G.ロフグレンの初期の消費x_0と資源保護論者の初期の消費x_0^*を比較してみる。ここで初期の資源ストックx_0は次の(4-67)になっているものとする。

$$x_0<\hat{x}<\tilde{x}<\bar{x} \tag{4-67}$$

いま、初期の消費は(4-68)の関係になっているものとする。

$$c_0^*>c_0 \tag{4-68}$$

このとき(1-3)の効用関数の性質、(2-7)および(4-29)から(4-69)になる。

$$0 < \lambda_0^* < \lambda_0 \tag{4-69}$$

$\dot{x} = f(x) - c$ であり、初期の資源ストック x_0 が同じであるので、(4-68)から(4-70)になる。

$$\dot{x}^*(0) < \dot{x}(0) \tag{4-70}$$

$\lambda(t)$ の連続性により、きわめて小さな時間 τ について(4-71)になるものとする。

$$\lambda^*(\tau) < \lambda(\tau) \tag{4-71}$$

(2-9)は(4-72)になる。

$$\frac{\dot{\lambda}^*}{\lambda^*} = -f'(x^*) - \frac{u_x^*}{\lambda^*} \tag{4-72}$$

(4-35)は(4-73)になる。

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = h(t) - f'(x) - \frac{u_x}{\lambda} \tag{4-73}$$

(4-70)から $x^* < x$ になり、再生関数の性質から $-f'(x^*) < -f'(x)$ となる。また(4-71)と効用関数の性質から、$-\frac{u_x^*}{\lambda^*} < -\frac{u_x}{\lambda}$ となる。このことと $h(t) > 0$ から(4-72)と(4-73)について(4-74)を得る。

$$\frac{\dot{\lambda}^*}{\lambda^*} < \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \tag{4-74}$$

(4-71)と(4-74)から(4-75)になる。

$$\lambda^*(t) < \lambda(t) \tag{4-75}$$

(2-7)、(4-29)および(4-75)から(4-76)になる。

$$c^*(t) > c(t) \tag{4-76}$$

$x^*(t) < x(t) < \hat{x}$ のときには $f(x^*) < f(x)$ となり、$c^*(t) > c(t)$ であるので、$\dot{x} = f(x) - c$ から $\dot{x}^*(t) < \dot{x}(t)$ となり、さらに $x^*(t) < x(t)$ となる。このことから時間が経過しても資源保護論者とC.リーとK.G.ロフグレンの二つの最適経路について同じ関係が続く。

だが、$\hat{x} < x^*(t) < x^0(t)$ になると $f(x^*) > f(x)$ になり $\dot{x}^*(t) < \dot{x}(t)$ となるとは限らず、必ずしも $x^*(t) < x(t)$ のままでない。ここで $x^*(t) < x(t)$ のままであると、二つの最適経路で同じ関係が続く。$x^*(t) = x(t)$ になっても最初の関係に戻るだけであるので同様に $c^*(t) > c(t)$ となる。

以上 (4-76)から時間が無限に経過すると(4-77)になる[32]。

$$\lim_{t\to\infty} c^*(t) > \lim_{t\to\infty} c(t) \tag{4-77}$$

だが資源保護論者の消費も C.リーと K.G.ロフグレンの消費も時間が無限大になるとともにグリーン黄金律経路での消費 $\bar{c}$ となり、等しくならなければならない。このことは(4-77)と矛盾するので、初期の最適な消費は(4-68)であってはならず、(4-78)となり資源保護論者の初期の消費はC.リーとK.G.ロフグレンの初期の消費より小さくなければならない。

$$c_0^* < c_0 \tag{4-78}$$

C.リーと K.G.ロフグレンの初期の消費 c_0 と功利主義者の初期の消費 c_0^0 の関係については

(4-79)の関係を得る。この(4-79)の証明については(4-78)とほぼ同じ方法でおこなうことができるので、ここでは省略する。

$$c_0 < c_0^0 \tag{4-79}$$

(4-78)と(4-79)から功利主義者の初期の消費 c_0^0、C.リーと K.G.ロフグレンの初期の消費 c_0 および資源保護論者の初期の消費 c_0^* の間には(4-80)の関係が成立することになる。

$$c_0^0 > c_0 > c_0^* \tag{4-80}$$

C.リーと K.G.ロフグレンによるモデルでは(4-2)の異時点間の厚生を最大にする最適経路はグリーン黄金律経路 $(\overline{x},\overline{c})$ に収束することから、最適な消費の経路を図4に描くと、点 b の下から点 B に向かう破線になる。

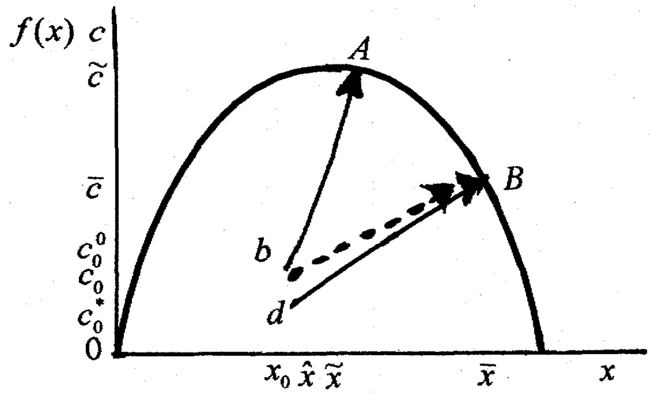

図4

結び

本稿では第1節と第2節で功利主義者と資源保護論者の再生可能資源の長期的な最適利用の方法の特徴について述べた。効用を一定の割引率で割り引く功利主義者の方法では、長期的な異時点間の厚生を最大にする最適経路は修正黄金律経路に収束するものになる。他方、効用を割り引かない資源保護論者の方法では、その最適経路はグリーン黄金律経路に収束することになる。もし割引率があまり大きくなければ、グリーン黄金律経路では修正黄金律経路よりも、資源ストックは大きく、消費は小さいということになる。また初期の資源ストックが同じである場合には、グリーン黄金律経路に進む最適経路では修正黄金律経路に進む最適経路よりも消費が小さくなっている。

G.チチルニスキーは、従来の功利主義者の方法が長期的な将来を考慮せず、現在の独裁となっており、資源問題や環境問題を考慮する場合不適切であると考えた。このため現在から将来の効用を一定の割引率で割り引く従来の功利主義者の厚生の部分と無限の将来の時点の効用との加重和である厚生関数を作成した。だが、このG.チチルニスキーの厚生関数でもって、長期的な異時点間の厚生を最大にする最適経路を実際見つけることは数学的にきわめて困難であった。だが、G.M.ヒールは効用に対する割引率を低下させるという数学的工夫を行うことにより、

この問題を解いた。だが、数学的にはこの方法は不完全であり、また、将来世代への配慮としては、無限の将来の時点の効用を厚生関数に含めるだけでは不十分である。

C.リーとK.G.ロフグレンは、効用を割り引きその現在価値の現在から無限の将来までの積分の部分と割り引かれていない効用の現在から無限の将来までの積分の部分の加重和により、厚生関数を作成している。これは功利主義者の立場と資源保護論者の立場の二つを尊重したものになっている。この厚生関数の後者の部分はG.チチルニスキーの厚生関数よりも将来世代をより強く配慮している。C.リーとK.G.ロフグレンは、この社会的厚生関数を使い、現在から無限の将来までの異時点間の厚生を最大にする問題を解いている。この厚生を最大にする最適経路は資源保護論者のグリーン黄金律経路に収束する。また、この最適経路での初期の消費は功利主義者の初期の消費よりも小さく、資源保護論者の初期の消費よりも大きくなっている。ただこの分析においては、非自励系の微分方程式という高度な数学を使わねばならず、筆者の理解能力を超えるものになっている。非自励系の微分方程式の理解を今後の検討課題にしたい。

注

(1) Krautkraemer,J.[8]p.155.

(2) Heal,G.M.[6]p.39.

(3) Clark,C. W.[5]p.631.

(4) Heal,G.M.[6]pp.46-48.

(5) Cass,D.[2]pp.840-841.

(6) Léonard,D. and N. V. Long[9]pp.100-104.

(7) Heal,G.M.[6]pp.50-51.

(8) Léonard,D. and N. V. Long[9]pp.288-289.

(9) Chichilnisky,G., G.M.Heal and A.Beltratti[3]pp.176-177.

(10) Léonard,D. and N. V. Long[9]p.104.

(11) Li,C. and K.G. Löfgren[10]p.249.

(12) Chichilnisky,G.[4]pp.231-233.

(13) Chichilnisky,G.[4]pp.239-241.および Heal,G.M.[6]pp.69-71.

(14) Heal,G.M.[6]pp.72.

(15) Chichilnisky,G.[4]p.235.

(16) G.チチルニスキーによれば、厚生関数が独立であるとは二つの世代 g_1 と g_2 の効用の限界代替率がそれらの二つの世代の実際の効用水準によって決定されないことである。Chichilnisky G.[4]p.251.

(17) $A \cap B = \phi$ であるとき、$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ を満たすと、関数 m は有限加法的測度と呼ばれる。日本数学会[18]640 頁。

(18) この G.チチルニスキーの厚生関数は、集合 S の部分集合の族での非負の測度 ϕ が可算可測的測度(a countably additive measure)と純有限可法的測度(a purely finitely additive measure)に分割されるという定理に基づいている。Yosida,K. and E. Hewitt[15]p.52.

(19) Chichilnisky,G.[4]p.244-246.

(20) Chichilnisky,G.[4]p.255.

(21) Heal,G.M.[6]pp.98-102.

(22) 小山[17]235 頁。

(23) (4-1)の厚生関数の第 2 項の積分 $\lim_{\theta \to 0} \int_0^\infty u(c,x)e^{-\theta t}dt$ において、効用の割引率 θ がゼロではなく $\theta \to 0$ となっているのは数学的分析を可能にするためである。

(24) Li,C. and K.G. Löfgren[10]p.238.

(25) ロピタルの定理は、小山昭雄[16]73-79 頁に述べられている。

(26) このロピタルの定理を使っての $a(0)$, $\lim_{\theta \to \infty} a(t)$ 、$a'(t)$の導出については、三重大学石谷教授のご指導をいただきました。

(27) Léonard,D. and N.V. Long[9]p.287.

(28) Li,C. and K.G. Löfgren[10]pp.239-240.

(29) Li,C. and K.G. Löfgren[11]pp.8-9.

(30) Benaïm,M. and M. W. Hirsch[1]pp.150-151.

(31) Li,C. and K.G. Löfgren[11]pp.9-10.

(32) Li,C. and K.G. Löfgren[10]p.249.

参考文献

[1] Benaïm,M. and M.W.Hirsch, "Asymptotic Pseudotrajectories and Chain Recurrent Flows with Applicatins," *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Vol. 8, No.1,1996,pp.141-176.

[2] Cass,D.,"Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation:A Turnpike Theorem," *Econometorica*,Vol.34,No.4,October,1966,pp.833-850.

[3] Chichilnisky, G., G.M.Heal and A.Beltratti, "The Green Golden Rule," *Economic Letters*, Vol.49, No.2,August,1995,pp.175-179.

[4] Chichilnisky,G., "An Axiomatic Approach to Sustainable Development," *Social Choice and Welfare*, Vol.13,No.2,April,1996,pp.231-257.

[5] Clark,C.W., " The Economics of Overexploitation," *Science*,Vol.4100,August,1973, pp.630-634.

[6] Heal,G.M., *Valuing the Future :Economic Theory and Sustainability*, Columbia University Press, 1989.

[7] Heal,G.,"Discounting and Climate Change," Working Paper Series in Money,Economics and Finance, Climate Change 37, Columbia Business School(Columbia University), pp.335-343, May, 1997.

[8] Krautkraemer,J.A.,"Optimal Growth,Resource Amenities and the Preservation of Natural Environments, " *Review of Economic Studies*,Vol.52,No.1, January, 1985, pp.153-170.

[9] Léonard,D. and N.V. Long, *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press,1992.

[10] Li C. and K.G. Löfgren, "Renewable Resources and Sustainability: A Dynamic Analysis with Heterogeneous Time Preferences," *Journal of Environmental Economics and Management*, Vol.40, No.3, December,2000, pp.236-250. 森岡 洋訳「再生可能資源と経済的持続可能性－異なる時間選好に

よる動学分析」『地研年報』第 10 号(三重短期大学地域問題総合調査研究室、2005 年 3 月)。

[11] Li,C. and K.G. Löfgren, "Economic Growth,Environmental Quality and Hyperbolic Discounting," paper presented at the Tenth Annual Conference of the European Association of Environmental and Resource Economists,Rethymnon,Greece,June 30－July 2,2000.

[12] Phelps,E., "The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen," *The American Economic Review*, Vol.51,No.3,June,1961,pp.638-643.

[13] Weitzman, M.L."Why the Far-Distant Future Should Be Discounted at Its Lowest Possible Rate," *Journal of Environmental Economics and Management*, Vol.36, No.3, November, 1998, pp.201-208.

[14] Weitzman M. L., "Gamma Discounting", *The American Econmoic Review*, Vol.91, No.1, March, 2001,pp.260-271.

[15] Yosida,K. and E. Hewitt, "Finitely level independence means," *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.72,1952.pp.46-66.

[16] 小山昭雄著『経済数学教室 5（微分積分の基礎上）』岩波書店、1995 年。

[17] 小山昭雄著『経済数学教室 7 （ダイナミック・システム上）』岩波書店、1995 年。

[18] 日本経済学会編『数学辞典　第 2 版』岩波書店、1973 年。

なお、本稿の作成において厚生経済学研究会を通じて夏目隆神戸大学名誉教授のご指導を賜りました。また数学についてロピタルの定理の利用による数式の導出を三重大学石谷寛教授にそして非自励系の微分方程式について三重大学川向洋之助教授にご指導を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。