

偏微分発展方程式系によるベクトル場のノイズ除去

上山 英三

Noise Reduction for Vector Fields by Partial Differential Evolution Equations

Eizo UHEYAMA

1 はじめに

ランダムドットキネマトグラム（以下RDKと略記する）とは、ランダム（ドット）パターンからなる画像列・動画である。その典型的なものは小領域（Fig.1 (a)）が背景（Fig.1 (b)）の上を異なるベクトルをもって平行移動するようなものである（Fig.2(a) 上図）。これを観察すると、小領域が明確な輪郭を伴い（Fig.2 (a) 下図）、観察者側へと背景から分離されて知覚される（ポップアウト）。動画の再生をとめると、これまで知覚されていた輪郭は消え、小領域は背景に紛れ込んでしまう。

一方、自然な状況下ではなかなか存在しない特殊なRDKを構成することができる。例えば、小領域を表示する境界が固定され、その境界の中の運動ベクトルが、外の運動ベクトル場と異なっているもの（Fig.2 (b) 上図）である。そのようなRDKを観察すると、ポップアウトも明確な境界も知覚できない（Fig.2 (b) 下図）。この不自然なRDK（Fig.2 (b)）と典型的なRDK（Fig.2 (a)）との違いは、動きによって前面のパターンに隠されていく背景領域があるか否かということと、運動境界が動いているか否かということである。特に、後者を考慮に入れると、人間の運動知覚過程には、運動境界の動きを事前知識としてみなす過程があると考えられる。

さて、ノイズを含む観測値からの運動ベクトル場の推定は運動知覚の基本問題であり、人間においては、網膜から第一次視覚野程度の低位の視覚系で実行されると考えられている。この基本的な問題の困難さの一つは真の運動ベクトル場が境界やエッジ（空間的不連続）を含んでいることである。ノイズを除去しつつ、エッジをぼかす

ことなく明確に検出するには、非線形拡散項を持つ偏微分発展方程式であるフィルタ方程式系を用い、その反復回数を多くしなければならない。しかし、ベクトル場の真値が時変であるために、その時間変化に追従するには、方程式系の反復に多くの時間を割く訳にはいかない。この困難さを克服するために、上記の事前知識、即ち、運動境界の動きを前提とした推定方法が研究されてきた。そして、より正確な推定値をより速く得ることが期待されてきた。その中には、スムーズな運動境界の移動のために、例えば移流と拡散の効果を運動境界のダイナミクスに導入したものがある¹⁾。

本稿では、運動ベクトルの推定の推定の際に利用されると考えられる、運動境界の移動を実現するために興奮性媒体を適用する。興奮性媒体中では、後面に不応状態を伴って興奮状態がパルス波のように伝播する。それによって境界の移動の促進、即ち、上記の事前知識が実現できないかと考える。そこで、運動ベクトル場推定のためのフィルタ方程式系と、運動境界の滑らかな動きのために興奮性媒体を組み合わせた系の構成を考える。フィルタ方程式系によって検出された運動境界が興奮状態を生成し、その一方で、興奮性媒体中では、伝播する興奮状態がその前方の境界生成を促し、後面の不応状態が以前の境界を消滅させる。これらに相互作用により、境界の滑らかな動きが実現されると期待される。そして、上記の手法に基づく方法を用いることにより、誤差の小さな推定値が得られることを示す。

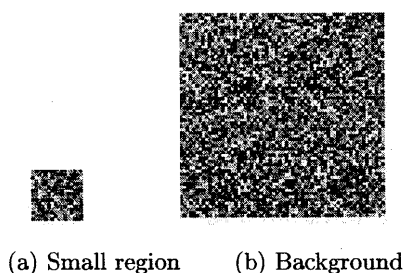


Fig. 1 Examples of random patterns

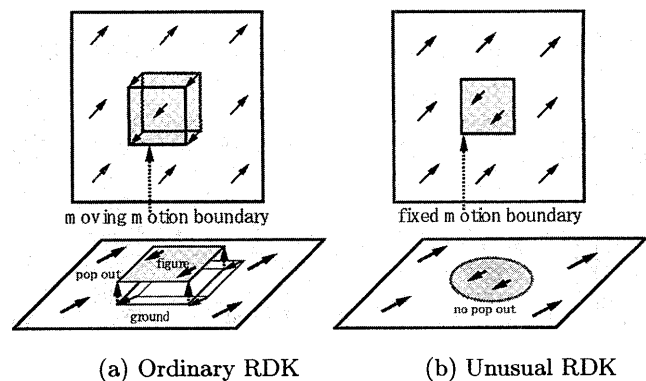


Fig. 2 Two RDK's and results of perception

2 興奮性媒体

ここでは、興奮性媒体について簡単に説明する。興奮性媒体内の1点は、ある閾値を超えた摂動（外部刺激）によって発火（興奮）し、不応状態を経て、初期の休止状態に戻る。その摂動は近隣の要素からの拡散流によって引き起こされる。この結果、伝播する興奮波が引き起こされる²⁾。興奮波が通過すると、そこはしばらくの間、刺激に反応しなくなる。この状態を不応期という。Fitzhugh-Nagumo 方程式（以後F N方程式と略記）は神経中の電気パルスの伝播を記述する興奮性媒体の数学的定式化の1例である。Fig.3 は、興奮性媒体の一連の時間発展を示す。中心の刺激から外側に興奮波が伝播するが、2つ目の刺激は、媒体が不応期にあるために消滅する。

以下の実際のシミュレーションでは、Fitzhugh-Nagumo 方程式のような偏微分発展方程式を用いることはせず、その離散モデルであるセルオートマトン（以下C Aと略記）を用いた。なぜなら、その振る舞いは検証が容易であり、フィルタ方程式との融合も容易であるからである。

3 推定方法

3.1 フィルタ方程式

x, y と t をそれぞれ空間と時間とする。そして、

$$\bar{\mathbf{u}}(x, y; t) = [\bar{u}(x, y; t), \bar{v}(x, y; t)]^T \quad (1)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y; t) = [\hat{u}(x, y; t), \hat{v}(x, y; t)]^T \quad (2)$$

をそれぞれ、運動ベクトルの真値と推定値とする。 T をサンプリング時間とすると、

$$\bar{\mathbf{u}}^k(x, y) = \bar{\mathbf{u}}(x, y; kT) + \boldsymbol{\xi}(x, y; kT) \quad (3)$$

は k 番目のフレームの観測値を表す。ここで $\boldsymbol{\xi}$ は時空間相関と成分間相関に独立なノイズである。

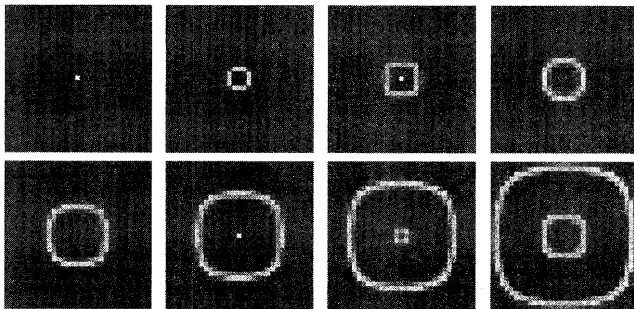


Fig. 3 Time evolution of excitable media

局所コーシー確率場モデル³⁾に基づく最尤推定値はフィルタ方程式系（F Eと略記）

$$\tau \dot{\hat{\mathbf{u}}} = a(\bar{\mathbf{u}}^k - \hat{\mathbf{u}}) + \left(\frac{\hat{u}_x}{\eta + \sigma^2} \right)_x + \left(\frac{\hat{u}_y}{\eta + \sigma^2} \right)_y \quad (4)$$

$$\tau \dot{\hat{\mathbf{v}}} = a(\bar{\mathbf{v}}^k - \hat{\mathbf{v}}) + \left(\frac{\hat{v}_x}{\eta + \sigma^2} \right)_x + \left(\frac{\hat{v}_y}{\eta + \sigma^2} \right)_y \quad (5)$$

の時間発展により得られる。ここで、

$$\eta = \hat{u}_x^2 + \hat{u}_y^2 + \hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2, \quad (6)$$

であり、ドットは時間微分、下添え字は空間偏微分を表す。また、 σ と a は正のパラメータ、 τ は時定数である。

方程式 (4)(5) を空間について離散化するために、まず、偏微分を差分

$$\hat{u}_x^2 + \hat{v}_x^2 \simeq (\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{i-1j})^2 + (\hat{v}_{ij} - \hat{v}_{i-1j})^2 \triangleq p_{ij} \quad (7)$$

$$\hat{u}_y^2 + \hat{v}_y^2 \simeq (\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{ij-1})^2 + (\hat{v}_{ij} - \hat{v}_{ij-1})^2 \triangleq q_{ij} \quad (8)$$

に置き換える。ここで、空間刻み幅は1(Fig.4 真中)である。そして、空間的に離散化された方程式 (4)(5) は

$$\tau \dot{\hat{u}}_{ij} = a(\bar{u}_{ij}^k - \hat{u}_{ij}) + X_{i+1j}^u - X_{ij}^u + Y_{ij+1}^u - Y_{ij}^u \quad (9)$$

$$\tau \dot{\hat{v}}_{ij} = a(\bar{v}_{ij}^k - \hat{v}_{ij}) + X_{i+1j}^v - X_{ij}^v + Y_{ij+1}^v - Y_{ij}^v \quad (10)$$

と記述される。ここで、 $*$ が u または v を表すとすると

$$X_{ij}^* = \frac{\hat{*}_{ij} - \hat{*}_{i-1j}}{p_{ij} + q_{ij} + \sigma^2}, Y_{ij}^* = \frac{\hat{*}_{ij} - \hat{*}_{ij-1}}{p_{ij} + q_{ij} + \sigma^2} \quad (11)$$

である。ここで p_{ij} と q_{ij} を

$$p_{ij} = \max\{\min(p_{ij-1}, p_{ij}), \min(p_{i+1j-1}, p_{i+1j})\} \quad (12)$$

$$q_{ij} = \max\{\min(q_{i-1j}, q_{ij}), \min(q_{i-1j+1}, q_{ij+1})\} \quad (13)$$

と近似する (Fig.4 左図と右図)。この離散化法により鋭い境界が明確に検出される。

境界の存在は

$$P_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{ij} + \sigma^2}, Q_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_{ij} + \sigma^2} \quad (0 \leq P_{ij}, Q_{ij} < 1) \quad (14)$$

が閾値 θ より大きいかな否かによって決定される。

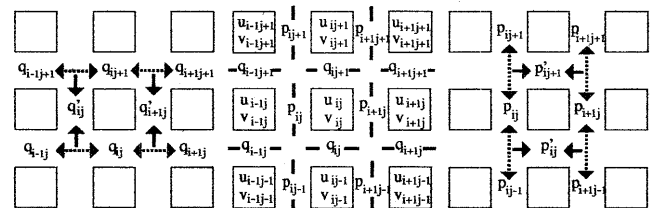


Fig. 4 Boundary element and representation scheme

3.2 セルオートマトン (CA)

セルオートマトンにおける離散時間 n についての状態変数 ϕ_{ij}^n と ψ_{ij}^n を、それぞれ前節で紹介した p_{ij} と q_{ij} と同じ位置上で定義することにする (Fig.4 中心図). そして、 $\phi_{ij}^n = \psi_{ij}^n = 0$, $\phi_{ij}^n = \psi_{ij}^n = 1$, $\phi_{ij}^n = \psi_{ij}^n = -1$ がそれぞれ、静止、興奮、不応状態に対応するものとする。

状態遷移規則を

$$\phi_{ij}^{n+1} = \begin{cases} 0, & \phi_{ij}^n = 0 \text{ and } \Phi_{ij}^n < 1 \\ 1, & \phi_{ij}^n = 0 \text{ and } \Phi_{ij}^n \geq 1 \\ -1, & \phi_{ij}^n = 1 \\ 0, & \phi_{ij}^n = -1 \end{cases} \quad (15)$$

$$\psi_{ij}^{n+1} = \begin{cases} 0, & \psi_{ij}^n = 0 \text{ and } \Psi_{ij}^n < 1 \\ 1, & \psi_{ij}^n = 0 \text{ and } \Psi_{ij}^n \geq 1 \\ -1, & \psi_{ij}^n = 1 \\ 0, & \psi_{ij}^n = -1 \end{cases} \quad (16)$$

$$\Phi_i^n = I_{ij-1}^n + I_{i-1,j}^n + I_{ij}^n + I_{i+1,j}^n + I_{ij+1}^n \quad (17)$$

$$\Psi_i^n = J_{ij-1}^n + J_{i-1,j}^n + J_{ij}^n + J_{i+1,j}^n + J_{ij+1}^n \quad (18)$$

$$I_{ij}^n = \begin{cases} 1, & \phi_{ij}^n = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

$$J_{ij}^n = \begin{cases} 1, & \psi_{ij}^n = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

のように定義する。ここで、 ϕ_{ij}^n と ψ_{ij}^n の間には相関がないものとした。上記の状態遷移は、1 フレーム毎に観測データが更新されたときに生じるものとする。

3.3 フィルタ方程式とセルオートマトンとの間の相互作用

セルオートマトンの状態は、観測データがフレーム毎に更新される直前に

$$\phi_{ij}^{n+1} = \begin{cases} 1, & \phi_{ij}^n = 0 \text{ and } P_{ij} \geq \theta \\ 0, & \phi_{ij}^n = 1 \text{ and } P_{ij} < \theta \\ \phi_{ij}^n, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

$$\psi_{ij}^{n+1} = \begin{cases} 1, & \psi_{ij}^n = 0 \text{ and } Q_{ij} \geq \theta \\ 0, & \psi_{ij}^n = 1 \text{ and } Q_{ij} < \theta \\ \psi_{ij}^n, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

のように設定されるものとする。ここで、方程式 (21)(22) の第 1 行は、フィルタ方程式の反復で生じた境界によっ

て、セルオートマトンに興奮状態を引き起こす刺激が与えられたことを意味する。そして、同じく第 2 行は、境界を発生させなかった無効で不必要な興奮状態を削除することを意味する。

一方で、離散化されたフィルタ方程式 (9)(10) に対して

$$p_{ij} \leftarrow \alpha_{ij} p_{ij}, \quad q_{ij} \leftarrow \beta_{ij} q_{ij} \quad (23)$$

のような修正を施すものとする。ここで、 α_{ij} と β_{ij} の値を、 ϕ_{ij} と ψ_{ij} の値に応じて

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \phi_{ij}^n = 0 \\ \alpha^+ (> 1), & \phi_{ij}^n = 1 \\ \alpha^- (< 1), & \phi_{ij}^n = -1 \end{cases} \quad (24)$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \psi_{ij}^n = 0 \\ \beta^+ (> 1), & \psi_{ij}^n = 1 \\ \beta^- (< 1), & \psi_{ij}^n = -1. \end{cases} \quad (25)$$

のように変化させる。式 (24)(25) の第 2 行は興奮状態が境界の生成を促進することを、そして、同じく第 3 行は不応状態が境界を抑制することを、それぞれ意味する。

4 シミュレーション

Fig.5(a) 及び (b) は、それぞれ、シミュレーションで用いる運動ベクトル場の真値と観測値を示す。最上段は第 1 フレームのデータを、最下段は第 5 フレームのデータを表す。ベクトル場の真値について、中心の菱形領域とその残りの領域には、それぞれ、 $[1, 0]^T$ と $[-1, -1]^T$ のベクトルが与えられている。菱形領域の運動境界は、1 フレームあたり $[1, 0]^T$ のベクトルをもって平行移動している。観測データは、真値に平均値と標準偏差がそれぞれ 0 と 0.5 の正規乱数が付加されたものである。

方程式 (9)(10) を、時間刻み幅 0.01 で、1 フレームあたり 400 回反復した。即ち、サンプリング時間は $T = 4$ である。パラメータについて、 $\sigma = 0.1$, $a = 0.1$ そして $\tau = 10$ とした。反復スキームは前進 Euler 差分法であり、Neumann 境界条件を採用した。方程式 (21)(22) 中の閾値は $\theta = 0.9$ であり、一方、方程式 (24)(25) 中では、 $\alpha^+ = \beta^+ = 3$, $\alpha^- = \beta^- = 1/3$ とした。

Fig.6(a)(b) は、方程式 (9)(10) のみを使って得られた推定値 \hat{u} とその境界 (P, Q) を示している。境界の動きはスムーズでなく、それに付随して境界付近の推定値が乱されている。

Fig.6(c)(d) は、式 (15) ~ (25) の組み合わせられた方程式 (9)(10) を用いて得られた推定値と境界である。Fig.6(e)(f)

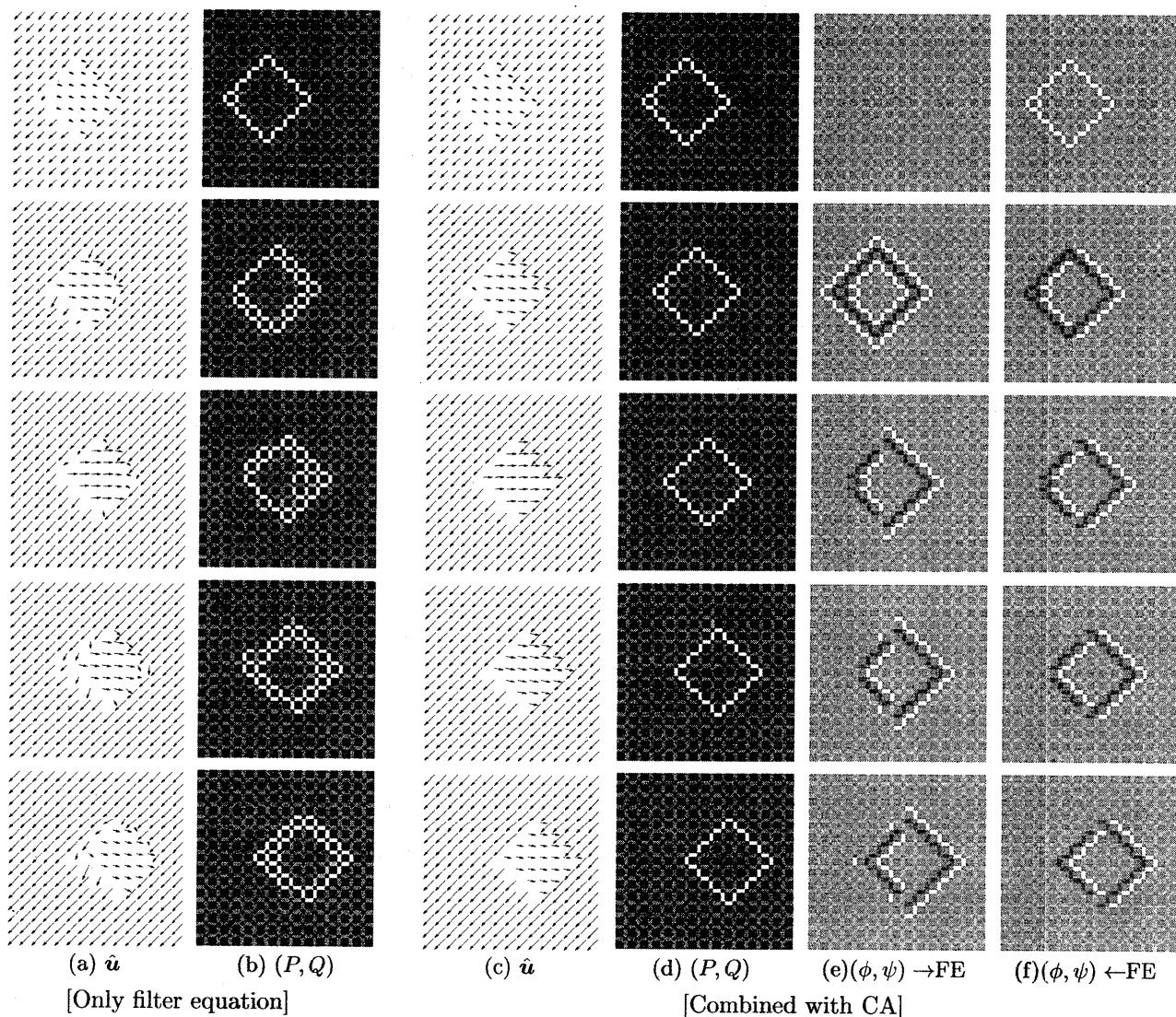


Fig. 6 Estimation result

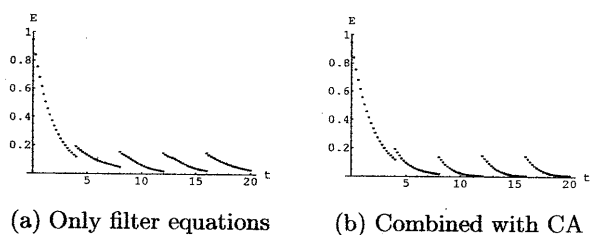


Fig. 7 Time plots of mean squared error E

参考文献

- [1] 上山英三, 湯浅秀男, 細江繁幸: 動きの境界の移流と拡散によって実現される動き推定, 電子情報通信学会論文誌, **J83-D-II-2**, pp.653-661 (2000).
- [2] A.S.Mikhailov: Foundations of Synergetics I, 32/80, Springer-Verlag (1990).
- [3] 土屋和雄, 中西健二: 不連続性を含む確率場のベイズ推定, 計測自動制御学会論文集, **28-4**, pp.514-518 (1992).
- [4] 上山英三, 湯浅秀男, 細江繁幸, 伊藤正美: 反応拡散方程式を用いた動きによる図地分離—形成されたパターンの界面と主観的輪郭—, 電子情報通信学会論文誌, **J-81-D-II-12**, pp.2767-2778 (1998).
- [5] 大倉昭人, 湯浅秀男, 新井民夫: 自律分散的アプローチによる運動物体の3次元形状認識, 第19回日本ロボット学会学術講演会講演論文集, pp.853-854, (2001).
- [6] 上山英三, 藤本英雄, 湯浅秀男, 細江繁幸: 運動知覚のシナジェティクスと運動境界のダイナミクス, 第15回自律分散システム・シンポジウム資料, pp.139-142, (2003).

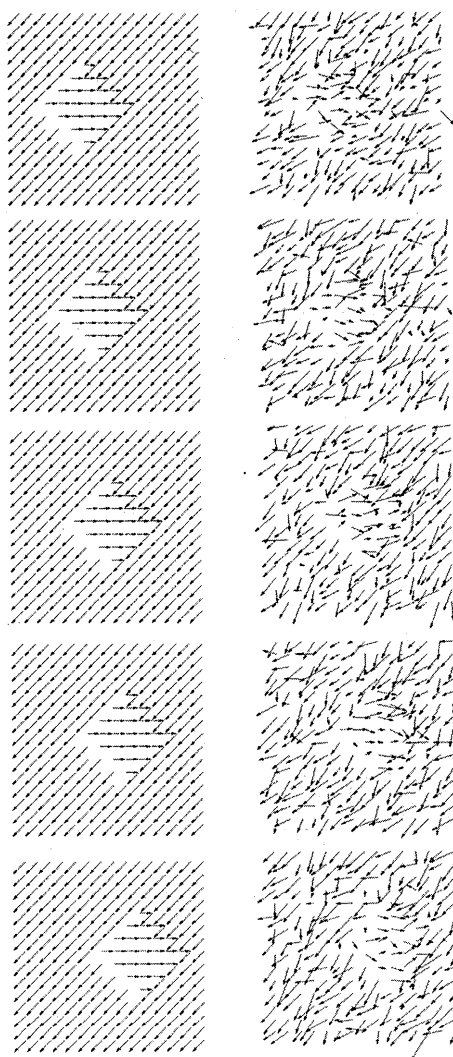


Fig. 5 True values and observed data

は、それぞれ、式 (24)(25) と式 (21)(22) によって定義される状態遷移が終わった後のセルオートマトンの状態 (ϕ, ψ) を示している。 (ϕ, ψ) は、新たに生成された境界から刺激を受けて興奮状態になり (Fig.6(f) 第1行)、次のフレームで、自らは不応状態に遷移し、そこから生じた興奮波が内側と外側へと伝播する (Fig.6(e) 第2列)。なお、式 (21)(22) の第2式を適用することにより、次のフレームで境界を生成しなかった不要な興奮状態は削除される (Fig.6(f) 第2行)。

上記の操作を繰り返すうちに、後面に不応状態を伴った興奮波が左から右に移動するようになる。前面の興奮状態が境界の新たな生成を促し、後面の不応状態が、前のフレームで生じた境界を消去しようとする。これらの二つの作用により、境界の滑らかな動きが実現され、そ

して、そのことにより正確な推定値が求められている。

一方、定量的な評価を行うため、平均2乗誤差

$$E = \frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{(\hat{u}_{ij} - \bar{u}_{ij})^2 + (\hat{v}_{ij} - \bar{v}_{ij})^2\} \quad (26)$$

の時間変化を、Fig.7 にプロットする。セルオートマトンを組み込んだもの (Fig.7(b)) の方が組み込まなかった方 (Fig.7(a)) に比べて、推定値の誤差の小さいことがわかる。このことから、定量的にも良好な推定値が得られていることが確認できる。

5 まとめと議論

自然な動画像では、「運動境界は動く」のが普通である。「運動境界の動きが、その境界のどちら側の動きと一致しているか」が奥行き知覚の手がかりになる。それに基づいて、RDKから図地分離を行った例がある⁴⁾⁵⁾。

本稿では、上記の「運動境界は動く」という先見的知識を利用した視覚の計算過程についての考察を述べた。その際に、「ノイズを含む運動ベクトル場の観測値からのノイズ除去」という基本的な視覚過程の問題を取り上げた。この問題の解法に、上記の先見的知識を適用することにより、推定値の精度の向上やそれに伴う境界の滑らかな動きがもたらされた。ただし、その際、興奮性媒体の離散モデルであるセルオートマトンを用いて、上記の事前知識を推定系と組み合わせた。

課題としては、運動境界の移動速度が1ではなく、任意の(実)数である場合や、それが時変な場合への本手法の適用が挙げられる。そのような拡張に際して考えられるのは、まず、興奮性媒体の連続モデルである反応拡散方程式系の適用が有効ではないかと考えられる。そこで、問題を1次元系に限定し、境界間に仮想的な素子を導入して、FN方程式の適用を試みたもの⁶⁾がある。ここでは、FN方程式のふるまいを望ましいものに調整することが難しかったために、望ましい結果は得られなかった。また、2次元系への拡張も困難であった。

一方、離散モデルであるセルオートマトンについても、まだ検討の余地はあると思われる。式 (18) において、過去の履歴から、進行方向に応じて、参照する近隣の要素を変化させたり、場合によっては、二つの成分間に相関を持たせることなども一つの解決方法かもしれない。

以上のように様々な問題点と対策が未解決であり、これらの解決が今後の課題である。